

1 k を実数とし、 $f(x) = x^2 - kx + 3k$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を調べよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が表す放物線の頂点の y 座標が 1 以上となるような最大の整数 k を求めよ。

2 直角三角形 $OP_1Q_1, OP_2Q_2, OP_3Q_3, \dots$ がある。ただし 各 n について、 $\angle O$ は直角で、 $\angle OP_nQ_n$ は n に無関係で一定な角 θ である。一辺 OP_n の長さを a_n とおくと、 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列をなすとする。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) 辺 P_nQ_n の長さを n と θ を用いて表せ。
- (2) 斜辺 P_nQ_n を一辺とする正方形の面積を S_n とするとき、

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

を n と θ を用いて表せ。

- (3) S_n を (2) のように定めるとき、

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 90$$

をみたす角 θ の値を求めよ。

3 座標平面上に、中心がそれぞれ点 $(0, 1)$, 点 $(2, 1)$ で、同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 円 C_1, C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき 円 C_3 の中心の座標を求めよ。
- (2) さらに、2 円 C_1, C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき 円 C_4 の中心の座標を求めよ。

4 1 から 9 までの番号が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この 9 枚のカードをよくきって重ねた後、上から 3 枚のカードを順に左から並べて、3 桁の数を作る。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 3 桁の数が 500 以上である確率を求めよ。

(2) 3 桁の数が 500 以上の偶数である確率を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

6 実数 t に対して, $f(t)$ を

$$f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$$

と定める。 $0 \leq t \leq 1$ のとき, $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

7

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

8 座標空間内に 2 点 $A(1, 0, 0)$ と $B(-1, 0, 0)$ がある。不等式

$$\angle APB \geq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に、2 点 A, B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。

9 行列 E と A を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 $xE - A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α, β ($\alpha > \beta$) とし、行列 P, Q を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 行列の積 PQ を計算せよ。
- (2) 自然数 n に対して、 P^n を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して、

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

が成立することを示せ。

10 次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) n が正の整数のとき、 $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

11 n を 2 以上の整数とし,

$$I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt \quad (x \geq 0)$$

と定める。

(1) $n = 2$ のとき, $I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2 - 1}$$

であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

12 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= c \\ a_{n+1} &= \frac{a_n^2 - 1}{n} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

で定める。ここで c は定数とする。

- (1) $c = 2$ のとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $c \geq 2$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となることを示せ。
- (3) $c = \sqrt{2}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

13 - [ア]

次の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め、図示せよ。

- (2) 複素数 z が (1) で求めた図形の上を動くとき、複素数

$$w = (-1 + i)z$$

が表す点の軌跡を求め、図示せよ。

13 - [イ]

配列 (添え字付き変数) a において, $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$ には, 異なる整数の値が入っている。このとき, 次頁の流れ図は

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

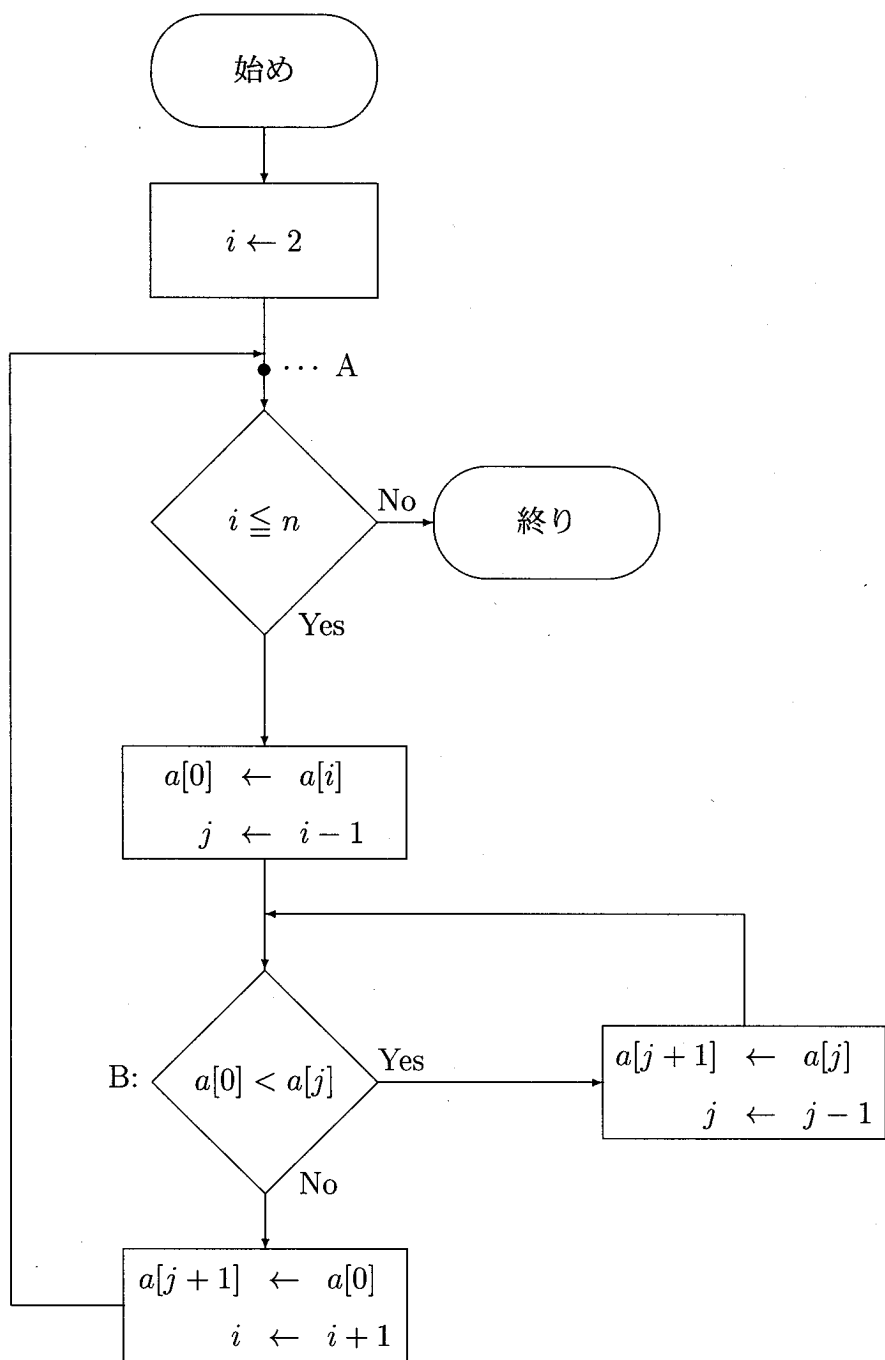
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。このプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし, 長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n = 4$ とし, 「始め」においては

$$a[0] = 0, a[1] = 5, a[2] = 2, a[3] = 7, a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの, A 点における i の値と $a[k]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は, $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値により異なる。この判定回数をもっとも少ない場合の判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそのような $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値の例を示せ。ただし, いずれも証明を述べなくてよい。



14 - [ア]

次の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め、図示せよ。

- (2) 複素数 z が (1) で求めた図形から $z = i$ を除いた部分を動くとき、複素数 $w = \frac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め、図示せよ。

14 - **[イ]**

配列 (添え字付き変数) a において, $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が入っている。このとき, 次頁の流れ図は

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

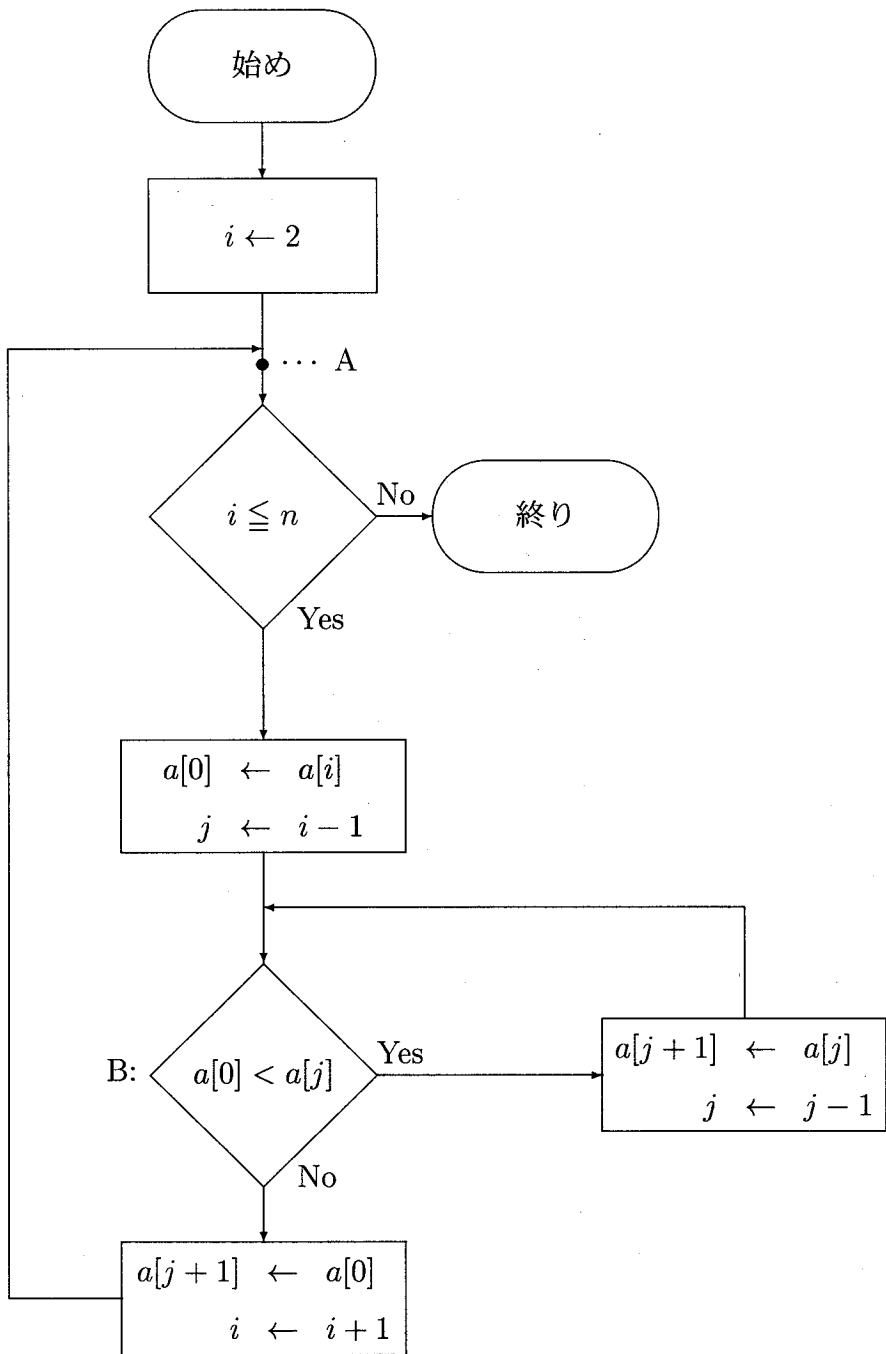
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし, 長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n = 4$ とし, 「始め」においては

$$a[0] = 0, a[1] = 5, a[2] = 2, a[3] = 7, a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの, A 点における i の値と $a[k]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は, $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値により異なる。この判定回数がもっとも少ない場合と, もっとも多い場合について, それぞれ判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそれぞれの場合に対応する $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値の例を示せ。ただし, いずれも証明を述べなくてよい。



14 - [ウ]

1 から 10 までの番号が書かれた札が 1 枚ずつある。この 10 枚の札から無作為に 5 枚の札を取り出す。このとき、取り出された札のうち、番号が 5 以下であるものの枚数を X とおく。次の問いに答えよ。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) X の平均 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ。
- (3) $X = 5$ のときは 10,000 円, $X = 4$ のときは 1,000 円, $X = 3$ のときは 100 円の賞金がもらえるが, その他の場合はもらえないものとする。賞金の期待値を求めよ。