

1

$f(x) = x^4 + ax^3 + ax^2 + bx - 6$ が $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ で割り切れる
 ならば、 $f(x)$ は $x-1$ で割り切れる (因数定理より).

$$f(1) = 2a + b - 5 = 0 \iff b = 5 - 2a$$

である。このとき、 $f(x) = x^4 + ax^3 + ax^2 + (5-2a)x - 6$ は $x-1$ で
 実際に割れる。

$$(x-1) \{ x^3 + (a+1)x^2 + (2a+1)x + 6 \}$$

とあるから、 $x^3 + (a+1)x^2 + (2a+1)x + 6$ がさらに $x-1$ で割り切
 れることになり、再び因数定理から

$$1 + a + 1 + 2a + 1 + 6 = 3a + 9 = 0 \iff a = -3$$

より、求める値は、 $a = -3, b = 11$ である。

$\{1a, 1b, 1c, 1d; 2a, 2b, 2c, 2d; \dots; 6a, 6b, 6c, 6d\}$ の 24 枚として考える。

- (1) 31 枚の 2 枚の同じ数字となるものは、数字が 1~6 の 6 通りあり、数字が指定されたときにアルファベット a, b, c, d の 4 の 2 つの組み合わせが $4C_2 = 6$ 通りずつあるから、求める確率は

$$\frac{6 \times 6}{24C_2} = \frac{6 \times 6}{12 \times 23} = \frac{3}{23}$$

- (2) 差が 3 以上となる 2 枚の組合せは (2) は、

1 と 4, 1 と 5, 1 と 6, 2 と 5, 2 と 6, 3 と 6

の 6 通りであり、2 枚が指定されたときアルファベットの組み合わせが 4 通りずつあることから、アルファベットの決め方は $4C_1 \times 4C_1 = 16$ 通りずつあるから、求める確率は

$$\frac{6 \times 16}{24C_2} = \frac{6 \times 16}{12 \times 23} = \frac{8}{23}$$

- (3) 2 枚のカードの数字が同じであるときの確率は、同じになる数字を指定するごとに、 $\frac{4C_2}{24C_2} = \frac{6}{12 \times 23} = \frac{1}{46}$ である。数字が異なるときには、2 つの数字を指定するごとに $\frac{4C_1 \times 4C_1}{24C_2} = \frac{16}{12 \times 23} = \frac{4}{69}$ である。

同じ数字であるときの期待値は、

$$\geq (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{46} = \frac{21}{23}$$

異なる数字の組合せをすべて考えて、これらの和の合計を求める

$$\sum_{k=1}^6 \{(k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) + (k+5) + (k+6)\}$$

$$= \sum_{k=1}^6 (6k+21) = 6 \times 21 + 21 \times 6 = 12 \times 21$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 (k+k) = 2 \sum_{k=1}^6 k = 2 \times 21 \text{ を除いた残りのちょうど半分}$$

である、 $\frac{12 \times 21 - 2 \times 21}{2} = 5 \times 21 = 105$ である。よって、このときの

$$\text{期待値は } 105 \times \frac{4}{69} = \frac{105 \times 4}{69} = \frac{35 \times 4}{23} = \frac{140}{23} \text{ となる。}$$

したがって、求める期待値は

$$\frac{21}{23} + \frac{140}{23} = \frac{161}{23} = 7$$

③

$$(1) \quad a_n = a + (n-1) \times 3 = \underline{3n + a - 3}$$

$$(2) \quad a_{k+1} - a_k = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \text{ と分解できる。}$$

$$a_1 = a, \quad a_n = 3n + a - 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3n + a - 3} \right) = \underline{\underline{\frac{n-1}{a(3n+a-3)}}} \end{aligned}$$

(3) $a_n > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$. 明らかなら S_n は単調増加数列である。よって、 $n=100$ のとき a に対して成立する不等式は十分である。

$$S_{100} = \frac{99}{a(a+297)} \geq \frac{1}{3a+1}$$

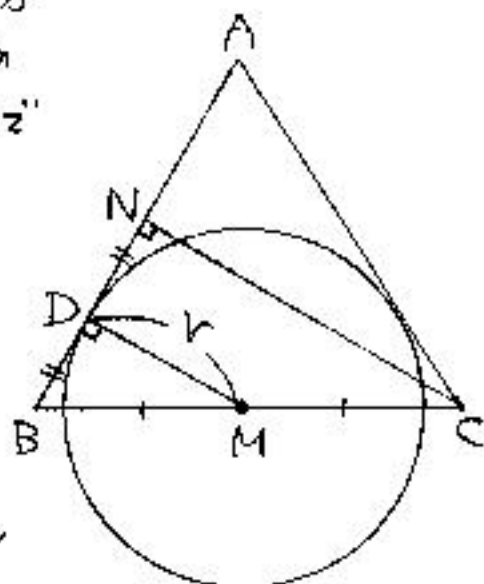
$$\Leftrightarrow a(a+297) \leq 99(3a+1) \Leftrightarrow a^2 \leq 99$$

($a \neq 0$) とき、求める最大の正の数 a は $\underline{\underline{3\sqrt{11}}}$ である。

- 4 (1) $AD = \frac{3}{4} \Leftrightarrow D$ は AB を $3:1$ に内分
 であり、 AB の中点を N とすれば、 D は BN の
 中点となる。よって、 $\triangle BMD$ と $\triangle BCN$ と
 あり、正三角形であることが

$$\angle BNC = 90^\circ \Rightarrow \angle BDM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow r = DM = BM \sin 60^\circ \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



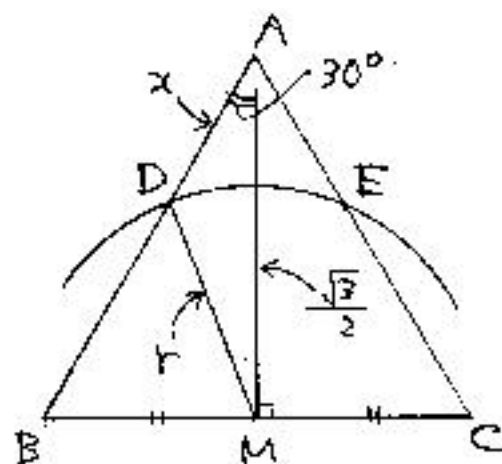
- (2) 右下图で、 $\triangle ADM$ に余弦定理を用いる、

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ \\ = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

- (3) $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ (正三角形) と相似、
 $AD = x$ とき $DE = x$ であり、 $\triangle DME$ に
 余弦定理を用いる、

$$DE^2 = DM^2 + EM^2 - 2DM \cdot EM \cdot \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2r^2 - 2r^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}r^2 \dots\dots (*)$$



- (2) の結果より、

$$x^2 = \frac{4}{3} \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) = \frac{4}{3}x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$$

- ゆえに $0 < x < 1$ であり、 $x = 3 - \sqrt{6}$ と決まり、(*) より

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{\sqrt{3}}{2} (3 - \sqrt{6}) = \frac{3}{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

5

(1) 2曲線が点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ で接線に共有する a を

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} = g(\frac{1}{2}) \quad \text{かつ} \quad f'(\frac{1}{2}) = g'(\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{1}{8} \quad \text{かつ} \quad \frac{3}{4} = a + b$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{3}{4} - a, \quad c = \frac{1}{8} - \frac{a}{4} - \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - a) = \frac{a}{4} - \frac{1}{4}$$

(2) $f(x) - g(x) = x^3 - ax^2 - (\frac{3}{4} - a)x - \frac{a}{4} + \frac{1}{4}$ であり、これを $h(x)$ と書けば

$$h'(x) = 3x^2 - 2ax - \frac{3}{4} + a = (x - \frac{1}{2})(3x + \frac{3}{2} - 2a)$$

であり、定義域 $0 \leq x \leq 1$ における $x = \frac{1}{2}$ と $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$ との間で、
2場合に分けて考えよう。

① $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{4}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ において $h(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極小かつ最小となり、

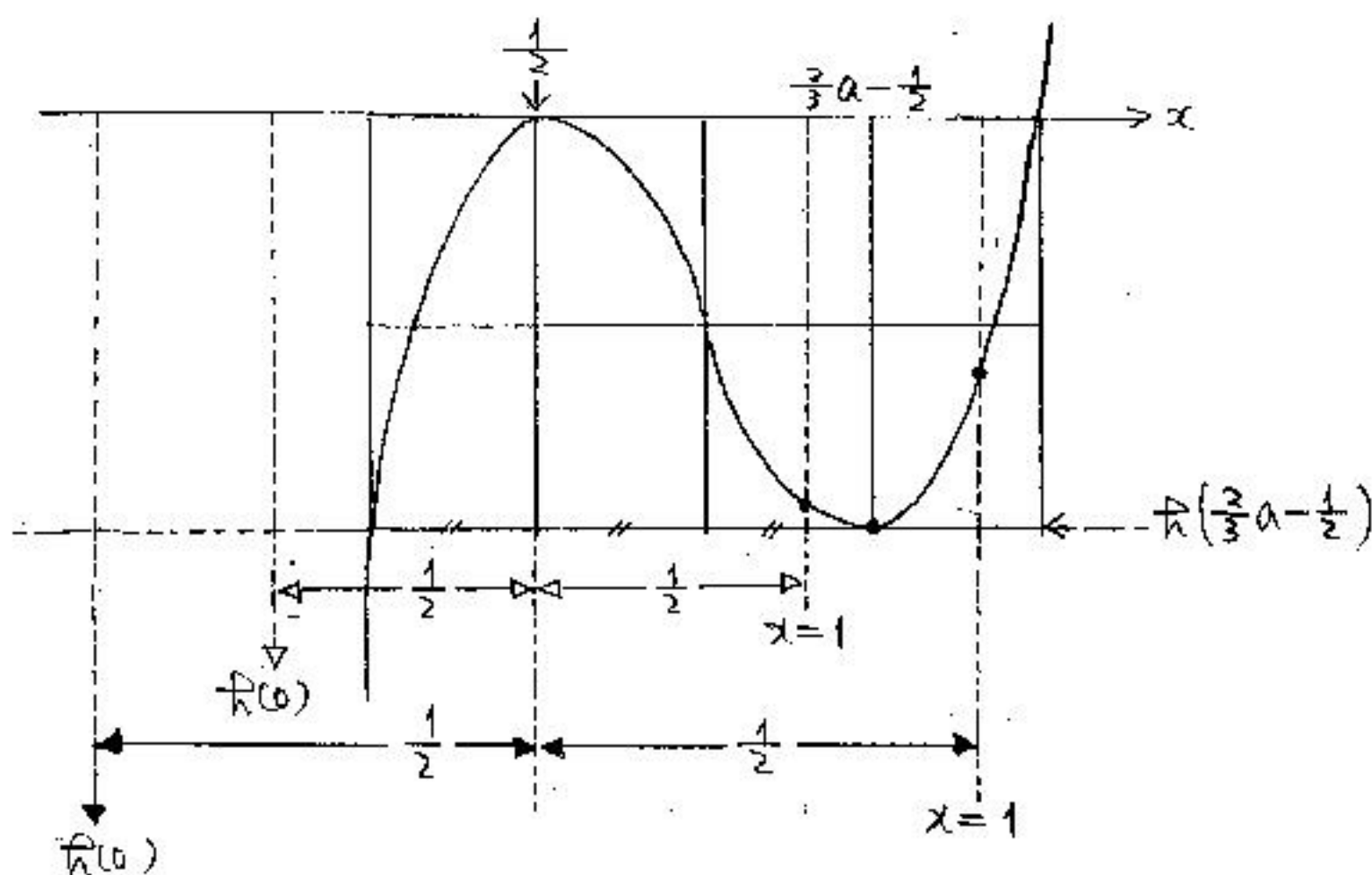
$$\text{最小値} = h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = 0$$

② $0 \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq a < \frac{3}{2}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における

最小値は $h(0) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}$ と $h(\frac{1}{2}) = 0$ のより小さい方となるので、

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \leq a < 1 \Rightarrow h(0) > h(\frac{1}{2}) \Rightarrow \text{最小値} = 0 \\ 1 \leq a < \frac{3}{2} \Rightarrow h(0) < h(\frac{1}{2}) \Rightarrow \text{最小値} = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

③ $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{2}$ のとき、すなわち、 $h(x)$ の極値をもたない単調増加な3次関数、すなわち、 $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$ で極小値をとる3次関数となるときには、3次関数のグラフの特性により、 $0 \leq x \leq 1$ における最小値は $h(0) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}$ である(図参照)。

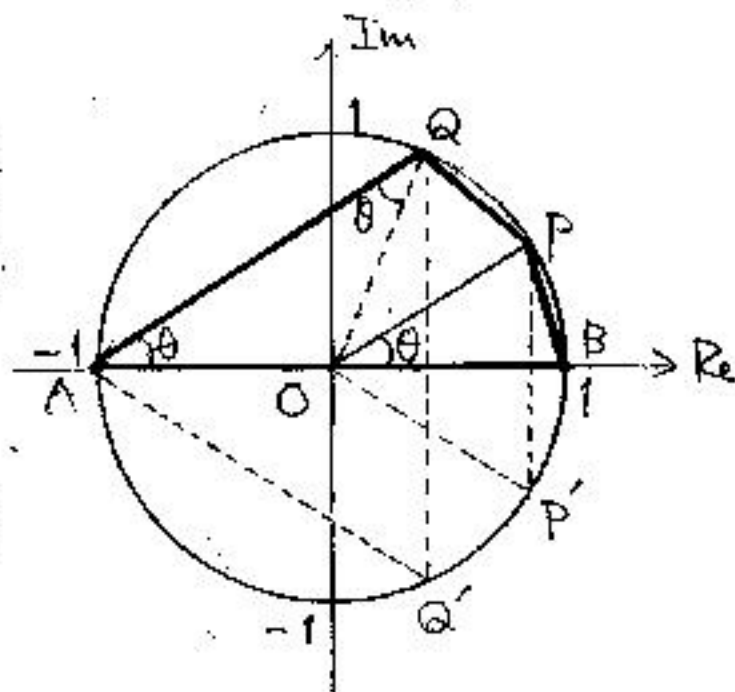


以上より、 $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値は、

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq a \leq 1 \\ -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} & a \geq 1 \end{cases}$$

6 (1) 実数係数なので2解は $\alpha, \bar{\alpha}$ ($D/4 = x^2 - 1 < 0$ より虚数解) であり、2解の積 $= \alpha \times \bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$; したがって、 $|\alpha| = 1$ である。

(2) 2解の和 $= 2 \times \operatorname{Re}(\alpha) = 2x$ であり
 $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ である。Pは第1象限
 にある点で、右図で $\angle BOP = \theta$
 とおけば、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、右図で
 さらに $\angle POQ = \theta$ もわかる。



よって、四角形ABPQの面積は
 $\triangle OBP, \triangle OPB, \triangle OQA$ の合計
 として求めることができる。

$$S(\theta) = 2 \times \frac{1^2 \sin \theta}{2} + \frac{1^2 \sin (\pi - 2\theta)}{2}$$

$$= \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$S'(\theta) = \cos \theta + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$$

$$= (\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) ; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

よって、 $S'(\theta) = 0$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。
 このとき最大とわかり、このときの
 $x = \operatorname{Re}(\alpha) = \cos \theta$ は $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 である。

したがって、

$$x = \frac{1}{2} \text{ のときに最大値} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	0
$S'(\theta)$	+	0	-
$S(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

7

(1) $\triangle OAB$ は $BO=BA$ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ の
 二等辺三角形であり、 $\angle AOB=\theta$ とする。

$$OA=2 \times OB \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow A(2 \cos \theta, 0)$$

また、 $B(\cos \theta, \sin \theta)$ と表す。

$$\therefore BP = \frac{1}{2} OA = \cos \theta$$

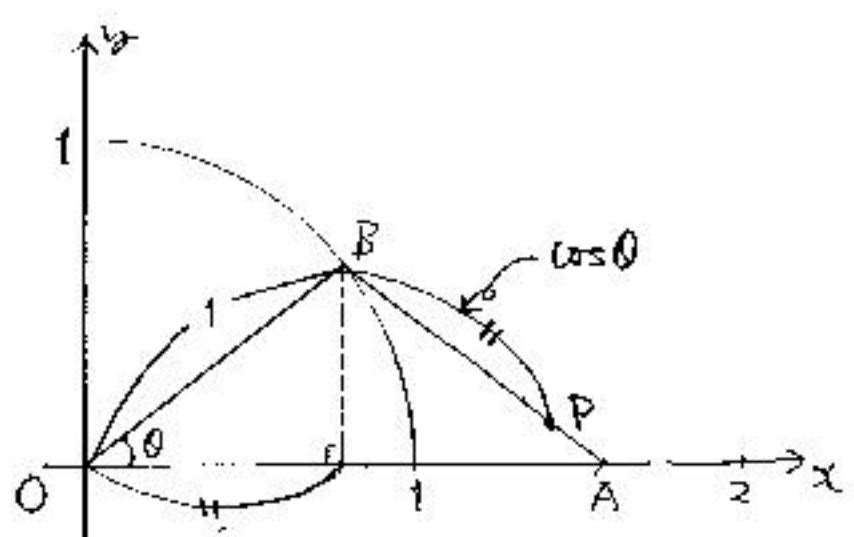
よって、 P は線分 AB の

$$(1 - \cos \theta) : \cos \theta$$

に内分する点である。よって、分点公式を用いる。

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \cos \theta \times \vec{OA} + (1 - \cos \theta) \times \vec{OB} \\ &= \cos \theta \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(2 \cos^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta, (1 - \cos \theta) \sin \theta) \\ = (\cos^2 \theta + \cos \theta, \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)$$



(2) $x(\theta) = \cos^2 \theta + \cos \theta$, $y(\theta) = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の

$$x'(\theta) = -2 \cos \theta \sin \theta - \sin \theta = -(2 \cos \theta + 1) \sin \theta \leq 0$$

より、 x は単調減少である。よって、面積は

$$\int_0^2 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(\theta) \times \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos \theta) \sin \theta \times \{-(2 \cos \theta + 1) \sin \theta\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)(2 \cos \theta + 1) \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta - 2 \cos^3 \theta)(1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^4 \theta - \cos^3 \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1) d\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \Leftrightarrow \cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4},$$

$$\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1 = 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1$$

$$= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$$

$$= 8 \cos^4 \theta - 4(1 + \cos 2\theta) + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8} \quad ; \text{よって、}$$

$$2 \cos^4 \theta - \cos^3 \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1$$

$$= \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{4} - \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

$$= \frac{6 + 6 \cos 2\theta}{4} + \cos \theta + 1$$

$$= \frac{1}{4} (\cos 4\theta - \cos 3\theta - 2 \cos 2\theta + \cos \theta + 1)$$

と表す。

よって、面積は

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\sin 4\theta}{4} - \frac{\sin 3\theta}{3} - \sin 2\theta + \sin \theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \pi + \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}$$

8 (1) $P_2(0) - P_1(0) = 0 - 0 = 0$, $P_2(1) - P_1(1) = 1 - 1 = 0$ である, 2次多項式 $P_2(x) - P_1(x)$ は因数定理により $x(x-1)$ で割り切れる. 同様に, 3次多項式 $P_3(x) - P_2(x)$ は $x(x-1)(x-2)$ で割り切れる.

$P_2(x) - P_1(x)$ と $P_2(x)$ の x^2 の係数, $P_3(x) - P_2(x)$ と $P_3(x)$ の x^3 の係数は一致するから, 以下の式が成り立つ.

$$P_2(0) = 0, P_2(1) = 1, P_2(2) = 3; P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow c = 0, a + b = 1, 4a + 2b = 3$$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}, c = 0 \Leftrightarrow P_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

$$P_3(0) = 0, P_3(1) = 1, P_3(2) = 3, P_3(3) = 7 \text{ なども同様にして}$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x \text{ を得られる.}$$

$$\therefore P_2(x) - P_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}, P_3(x) - P_2(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \text{ である.}$$

$$(2) P_n(x) = \sum_{k=2}^n \{P_k(x) - P_{k-1}(x)\} + P_1(x) \text{ である, } P_k(x) - P_{k-1}(x) \text{ について (1) の}$$

結果から推定 $\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ を用いて, $P_n(x)$ は

$$P_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + x \quad (P_1(x) = x)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad (*)$$

と推定する.

これに $x = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) を代入してみると, $k > k$ のとき $k!$ は $x(x-1)\cdots(x-k+1)$ の k 個の因数の中に $x-k$ が含まれているから,

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \sum_{i=1}^k \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \\ &= \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!} \end{aligned}$$

$$= {}^k C_1 + {}^k C_2 + \cdots + {}^k C_k = \sum_{i=1}^k {}^k C_i = 2^k - 1$$

が成立し, 異なる $(n+1)$ 個の数に適用する条件により, n 次多項式はただひとつに確定するから, 上の (*) から推定する $P_n(x)$ が成り立つ.

⑨ (1) $n=1$ のとき、 $Q_1 = N \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ の成立は明らかであり、 $n \geq 2$ について考えればよい。(ただし、数学的帰納法を自明なものではない)

仮に整数とすると、 $\frac{1}{2}$ の形で与えられる数を半整数と呼ぶことにする。

$$A_n = \frac{1}{2} \left(Q_n + \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor \right) \quad (Q_{n+1} \text{ はこの } A_n \text{ の整数部分として定義される})$$

よって、 $\left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor$ は整数なので A_n は半整数である。

一般に、 $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (-----①) が成り立つので、

$$A_n > \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{N}{Q_n} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{N}{Q_n} \right) - \frac{1}{2}$$

$$\geq \sqrt{Q_n \times \frac{N}{Q_n}} - \frac{1}{2} = \sqrt{N} - \frac{1}{2} \quad (\text{相加・相乗平均の不等式})$$

$$\Rightarrow A_n > \sqrt{N} - \frac{1}{2} \quad \text{----- ②}$$

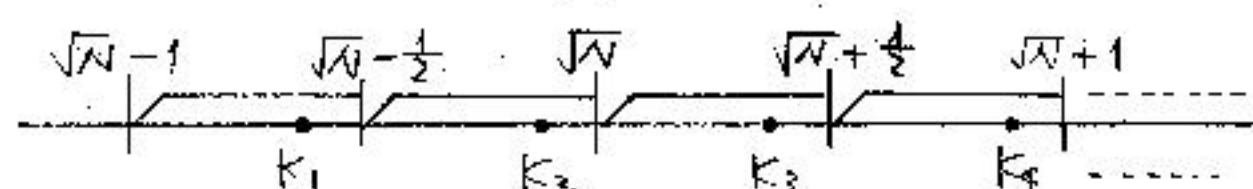
わかる。

ここから、 $x > \sqrt{N} - \frac{1}{2}$ となる $\frac{1}{2}$ の区間；

$$\left(\sqrt{N} - \frac{1}{2}, \sqrt{N} \right], \left(\sqrt{N}, \sqrt{N} + \frac{1}{2} \right],$$

$$\dots \left(\sqrt{N} + \frac{1}{2}, \sqrt{N} + 1 \right), \dots$$

に分けて考えると、これらの区間にはそれぞれ1個ずつの半整数が含まれることになるので、これらの区間に $K_1, K_2, K_3, \dots$ とおく。



A_n は $K_2, K_3, K_4, \dots$ のいずれかに一致するので、 $K_2 \leq A_n$ である。一方、連続する半整数 K_1 と K_2 の間には整数がないので $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ は K_1 または K_2 のいずれかに等しいので $\lfloor \sqrt{N} \rfloor \leq A_n$ がわかる。

よって、 $Q_{n+1} = \lfloor A_n \rfloor$ について、

$$Q_{n+1} = \lfloor A_n \rfloor \geq \lfloor \lfloor \sqrt{N} \rfloor \rfloor = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$$

が成り立ち、 $n \geq 2$ についても $Q_n \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ が成り立つ。

$$(2) \quad Q_n \leq Q_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(Q_n + \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor \right) \right\rfloor \leq \frac{1}{2} \left(Q_n + \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor \right) \quad (\because \text{①})$$

よって、 $2Q_n \leq Q_n + \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor \Leftrightarrow Q_n \leq \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor$ であり、これはさらに

$$Q_n \leq \left\lfloor \frac{N}{Q_n} \right\rfloor \leq \frac{N}{Q_n} \quad (\because \text{①}) \quad \text{とできるので、} \quad Q_n^2 \leq N \Rightarrow Q_n \leq \sqrt{N}$$

を得る。(1)の結果と合わせれば $\lfloor \sqrt{N} \rfloor \leq Q_n \leq \sqrt{N}$ となるので、 Q_n は整数であることがわかって $Q_n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ がわかる。

$$\boxed{10} \quad (\boxed{11}) - [P]$$

$$A(1, 1, 2), B(-5, 4, 0), C(0, x, 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6, 3, -2), \overrightarrow{AC} = (-1, x-1, -2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|^2 = 36 + 9 + 4 = 49, \\ |\overrightarrow{AC}|^2 = 1 + (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 6 \\ (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 = \{6 + 3(x-1) - 4\}^2 = (3x+7)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4S^2 &= 49(x^2 - 2x + 6) - (3x+7)^2 \\ &= 49x^2 - 98x + 294 - 9x^2 - 42x - 49 \\ &= 40x^2 - 140x + 245 \\ &= 40\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + 245 - 40 \cdot \frac{49}{16} \\ &\geq 245 - \frac{490}{4} = \frac{980 - 490}{4} = \frac{490}{4} \end{aligned}$$

∴ 2, $\triangle ABC$ の面積 S は $x = \frac{7}{4}$ のときに最小値

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{490}{4}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{10}}{4}}}$$

$$[0]([1]) - [1]$$

$$(1) \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1024}{10} \right\rfloor = 102 = 64 + 32 + 4 + 2 \\ = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1$$

$$\therefore \underline{1100110}_{(2)}$$

$$(2) b = f\left(\frac{1}{10}\right) = \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor = 102; \Delta = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} b = f(51) = 51; \Delta = 102$$

$$\xrightarrow{(2)} b = f(25) = 25; \Delta = 53$$

$$\xrightarrow{(3)} b = f(12) = 12; \Delta = 178$$

$$\xrightarrow{(4)} b = f(6) = 6; \Delta = 190 \xrightarrow{(5)} b = f(3) = 3; \Delta = 196$$

$$\xrightarrow{(6)} b = f(1) = 1; \Delta = 199 \xrightarrow{(7)} b = f(0) = 0 < c; \Delta = 200$$

とあるが、(ii) a 繰り通 (a 回数) は 7 回 であり、実行後 a 方は

$$f_a = f_a(200) = 2^{-10} \times 200 = \frac{2 \times 2^5}{2^{10}} \\ = \frac{2^5}{2^7} = \underline{\underline{\frac{2^5}{128}}}$$

$$[10] ([1]) - [7]$$

$$A(1, 1, 2), B(-5, 4, 0), C(0, x, 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6, 3, -2), \overrightarrow{AC} = (-1, x-1, -2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|^2 = 36 + 9 + 4 = 49, \\ |\overrightarrow{AC}|^2 = 1 + (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 6 \\ (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 = \{6 + 3(x-1) - 4\}^2 = (3x+7)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4S^2 &= 49(x^2 - 2x + 6) - (3x+7)^2 \\ &= 49x^2 - 98x + 294 - 9x^2 - 42x - 49 \\ &= 40x^2 - 140x + 245 \\ &= 40\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + 245 - 40 \cdot \frac{49}{16} \\ &\geq 245 - \frac{490}{4} = \frac{980 - 490}{4} = \frac{490}{4} \end{aligned}$$

∴ 2, $\triangle ABC$ の面積 S は $x = \frac{7}{4}$ のときに最小値

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{490}{4}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{10}}{4}}}$$

$$[0]([1]) - [1]$$

$$(1) \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1024}{10} \right\rfloor = 102 = 64 + 32 + 4 + 2 \\ = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1$$

$$\therefore \underline{1100110}_{(2)}$$

$$(2) b = f\left(\frac{1}{10}\right) = \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor = 102; \Delta = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} b = f(51) = 51; \Delta = 102$$

$$\xrightarrow{(2)} b = f(25) = 25; \Delta = 53$$

$$\xrightarrow{(3)} b = f(12) = 12; \Delta = 178$$

$$\xrightarrow{(4)} b = f(6) = 6; \Delta = 190 \xrightarrow{(5)} b = f(3) = 3; \Delta = 196$$

$$\xrightarrow{(6)} b = f(1) = 1; \Delta = 199 \xrightarrow{(7)} b = f(0) = 0 < c; \Delta = 200$$

とあるが、(ii) a 繰り通 (a 回数) は 7 回 であり、実行後 a 方は

$$f_a = f_a(200) = 2^{-10} \times 200 = \frac{2 \times 2^5}{2^{10}} \\ = \frac{2^5}{2^7} = \underline{\underline{\frac{2^5}{128}}}$$

(1) - [ウ]

$$(1) i=j \text{ のとき, } \frac{\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}}{\frac{4}{52}} = \frac{3}{51} = \underline{\underline{\frac{1}{17}}} \text{ であり, } i \neq j \text{ のときは,}$$

$$\frac{\frac{4}{52} \times \frac{4}{51}}{\frac{4}{52}} = \underline{\underline{\frac{4}{51}}} \text{ となる。}$$

$$(2) P(X=Y) = 13 \times \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{3}{51} = \underline{\underline{\frac{1}{17}}}$$

$$\begin{aligned}(3) P(Z=k) &= P(X \leq k, Y \leq k) - P(X \leq k-1, Y \leq k-1) \\&= \frac{4k(4k-1)}{52 \times 51} - \frac{(4k-4)(4k-5)}{52 \times 51} \\&= \frac{16k^2 - 4k - (16k^2 - 36k + 20)}{52 \times 51} = \frac{32k - 20}{52 \times 51} \\&= \frac{8k - 5}{13 \times 51} \quad ; \text{ となるから,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Z) &= \sum_{k=1}^{13} \frac{k(8k-5)}{13 \times 51} = \frac{1}{13 \times 51} \sum_{k=1}^{13} (8k^2 - 5k) \\&= \frac{1}{13 \times 51} \left(8 \times \frac{13 \times 14 \times 27}{6} - 5 \times \frac{13 \times 14}{2} \right) \\&= \frac{4 \times 13 \times 14 \times 9}{13 \times 51} - \frac{5 \times 13 \times 7}{13 \times 51} \\&= \frac{(72-5) \times 7}{51} = \frac{67 \times 7}{51} = \underline{\underline{\frac{469}{51}}}\end{aligned}$$