

11

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ より,}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{5}$$

又条件より $x > 0$ なので、

$$x = -2 + \sqrt{5} \text{ である.}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3}{(1+x)^3} \\ &= \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{1+x} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \end{aligned}$$

$$x = -2 + \sqrt{5} \text{ より}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{-1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1+x} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 &= 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{3+\sqrt{5}}{8} + \frac{2+\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{15+4\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{15+4\sqrt{5}}{8}$$

2

(1) $x^2 + ax + (a-1)^2 = 0$ が相異なる2解を持つ時

$$D = a^2 - 4(a-1)^2 = -3a^2 + 8a - 4 > 0$$

又2実解は、 $\frac{-a \pm \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2}$ となる。

よって2解の差の平方は、

$$\left(\frac{-a + \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2} - \frac{-a - \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2} \right)^2 = (\sqrt{-3a^2 + 8a - 4})^2$$

$$= -3a^2 + 8a - 4$$

答 $-3a^2 + 8a - 4$

(2) 2解の差を b (b は整数) とすると、(1)の結果から、
 $-3a^2 + 8a - 4 = b^2$ である。

$$-3a^2 + 8a - 4 = b^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + b^2 + 4 = 0$$

$3a^2 - 8a + b^2 + 4 = 0$ を満たす実数 a が存在するには、
 上式を a の関数と考えると、

$$\frac{D}{4} = 16 - 3(b^2 + 4) = 4 - 3b^2 > 0 \text{ が必要}$$

これを満たす整数 b は $b = 1$ のみ。

よって

$$3a^2 - 8a + 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(3a-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1, \frac{5}{3}$$

答 $a = 1, \frac{5}{3}$

3

(1) 2枚のカードのとり出し方は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{通り}$$

同じ番号のカードをとり出すのは
5通り

$$\text{よって} \quad \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

$$\underline{\underline{\text{答 } \frac{1}{9}}}$$

(2) $X=3$ のとき、 $Y \geq X$ より、 Y は3, 4, 5のどれか、

$Y=3$ のとき、とり出し方は1通り

$Y=4$ のとき、とり出し方は $2 \times 2 = 4$ 通り

$Y=5$ のとき、とり出し方は $2 \times 2 = 4$ 通り

よって

$$\frac{1 + 4 + 4}{45} = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{\text{答 } \frac{1}{5}}}$$

(3) (2)と同様にすると、

$X=1$ となる確率

$$\frac{1 + 4 + 4 + 4 + 4}{45} = \frac{17}{45}$$

$X=2$ となる確率

$$\frac{1 + 4 + 4 + 4}{45} = \frac{13}{45}$$

$X=4$ となる確率

$$\frac{1 + 4}{45} = \frac{1}{9}$$

$X=5$ となる確率

$$\frac{1}{45}$$

よって X の期待値は

$$1 \times \frac{17}{45} + 2 \times \frac{13}{45} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{45} = \frac{95}{45} = \frac{19}{9}$$

$$\underline{\underline{\text{答 } \frac{19}{9}}}$$

[4]

$$(1) \frac{(a_{n+2})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \text{ を上式に代入して、}$$

$$\frac{(a_{n+2})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = b_n - b_{n+1}$$

$$\text{答 } b_n - b_{n+1}$$

(2)(i) (1)の結果をつかって、

$$\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+2})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^6 b_n - b_{n+1}$$

$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_6 - b_7)$$

$$= b_1 - b_7$$

よって $b_1 - b_7 = -1456$ が成り立つ。

$$a_1 = 2, a_2 = 4 \text{ から } b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2 \text{ よって } b_7 = 1458.$$

$\{b_n\}$ 等比数列より、その公比を r ($r > 0$ の実数) とすると

$$b_7 = b_1 \cdot r^6 \text{ より、 } r^6 = \frac{b_7}{b_1} = \frac{1458}{2} = 729 \Leftrightarrow r = 3$$

よって $\{b_n\}$ は初項 2、公比 3 の等比数列。

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{答 } b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

(ii) 上の結果より、

$$a_{n+1} = b_n a_n = 2 \cdot 3^{n-1} a_n$$

よって、 $n \geq 2$ において、

$$a_n = a_1 \times 2 \times 2 \cdot 3 \times \dots \times 2 \cdot 3^{n-2} = 2^n \cdot 3^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$$

が成立

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\text{答 } a_n = 2^n \cdot 3^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$$

5

ある共有点で共通接線を持つということは、交点における
2曲線の傾きが等しいということ。

2曲線の傾きはそれぞれ

$$y' = 3x^2 + 4ax - 3a^2 \quad y' = 2ax - 2a^2$$

よって共有点のx座標を α (実数) とすると、

$$\begin{cases} \alpha^3 + 2a\alpha^2 - 3a^2\alpha - 4 = a\alpha^2 - 2a^2\alpha - 3a & \text{--- ①} \\ 3\alpha^2 + 4a\alpha - 3a^2 = 2a\alpha - 2a^2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

の2式が成立する。

$$\text{②} \Leftrightarrow 3\alpha^2 + 2a\alpha - a^2 = (\alpha + a)(3\alpha - a) = 0$$

よって $\alpha = -a$ 又は $\alpha = \frac{a}{3}$ である。

$\alpha = -a$ のとき、

①に代入して、

$$4a^3 - 4 = 3a^3 - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a - 4 = (a-1)(a^2 + a + 4) = 0$$

(a 実数より) $a = 1$

$\alpha = \frac{a}{3}$ のとき

①に代入して

$$-\frac{20}{27}a^3 - 4 = -\frac{5}{9}a^3 - 3a \Leftrightarrow 5a^3 - 81a + 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(5a^2 + 15a - 36) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

答 $a = 1, 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

16

$$\begin{aligned}
 a^{2x} - a^{2y} - a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^x + a^y \\
 &= (a^x + a^y)(a^x - a^y) - a^{x+y}(a^x - a^y) - (a^x - a^y) \\
 &= (a^x - a^y)(a^x + a^y - a^{x+y} - 1) \\
 &= (a^y - a^x)(a^x - 1)(a^y - 1) < 0
 \end{aligned}$$

a^n は n について $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき単調増加} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき単調減少} \end{cases}$ の関数なので、

$a > 1$ かつ $0 < a < 1$ かで場合わけする。

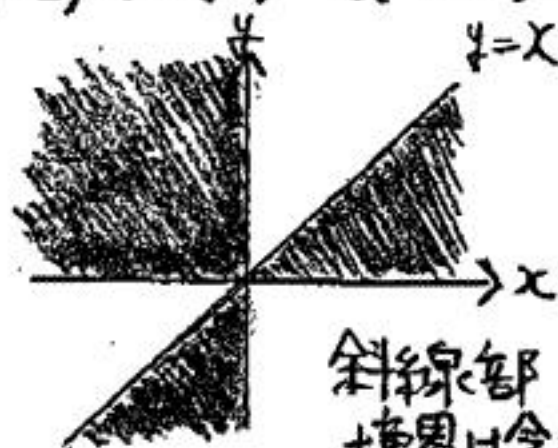
(i) $a > 1$ のとき、
 $x \neq 0, y \neq 0$

$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$ のとき $(a^x - 1)(a^y - 1) > 0$ より $a^y - a^x < 0$ が必要。

$$a^y - a^x < 0 \Leftrightarrow y < x$$

$\begin{cases} x > 0, y < 0 \\ x < 0, y > 0 \end{cases}$ のとき $(a^x - 1)(a^y - 1) < 0$ より $a^y - a^x > 0$ が必要。

$$a^y - a^x > 0 \Leftrightarrow y > x$$



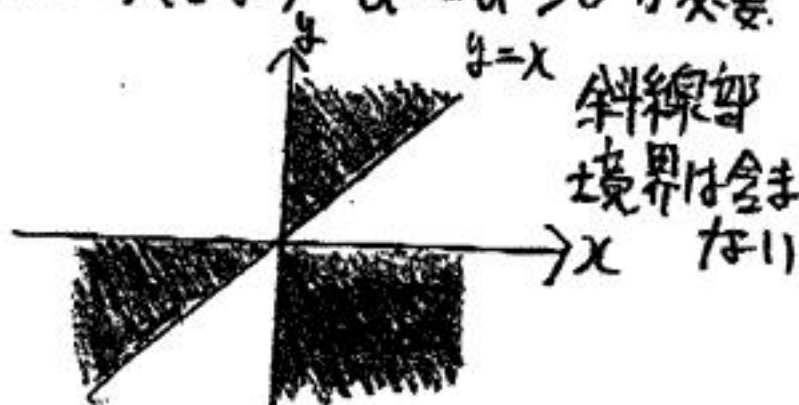
(ii) $0 < a < 1$ のとき
 $x \neq 0, y \neq 0$

$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$ のとき $(a^x - 1)(a^y - 1) > 0$ より $a^y - a^x < 0$ が必要。

$$a^y - a^x < 0 \Leftrightarrow y > x$$

$\begin{cases} x > 0, y < 0 \\ x < 0, y > 0 \end{cases}$ のとき $(a^x - 1)(a^y - 1) < 0$ より $a^y - a^x > 0$ が必要。

$$a^y - a^x > 0 \Leftrightarrow y < x$$



(1) 余式が成り立つのは

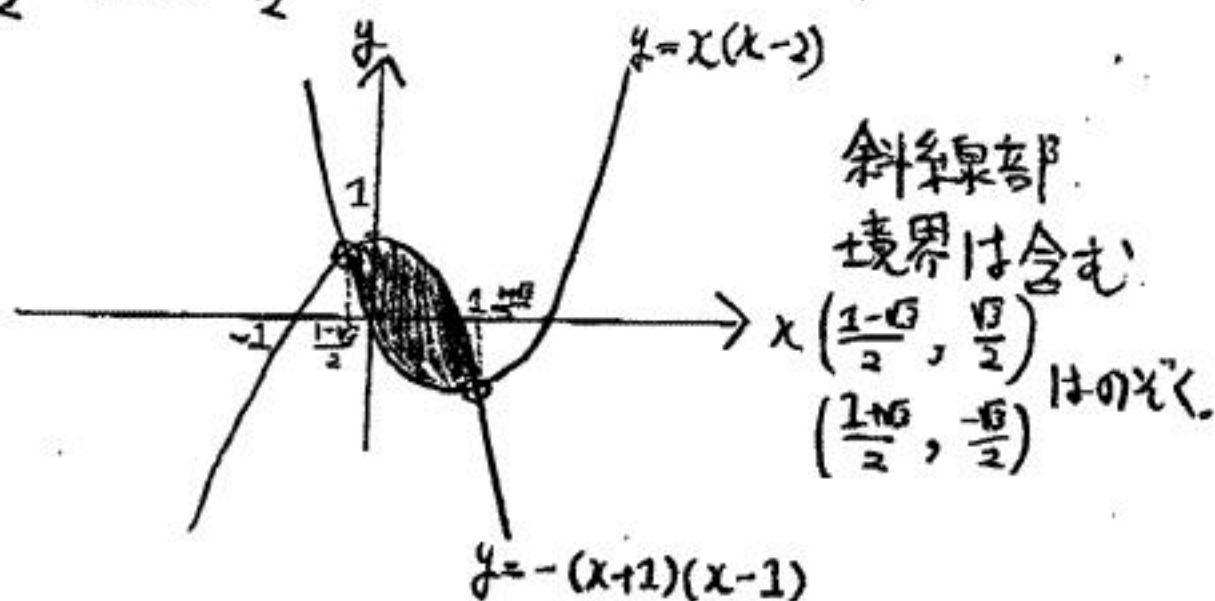
$$\begin{cases} -y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \geq -2x^2 + 2x + 1 & \text{--- ①} \\ -2x^2 + 2x + 1 > 0 & \text{--- ②} \end{cases} \text{ のとき}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow -y^2 - (2x-1)y + x(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y + (x+1)(x-1))(y - x(x-2)) \leq 0$$

$$\text{よって } \begin{cases} y \geq -(x+1)(x-1) \\ y \leq x(x-2) \end{cases} \text{ 又は } \begin{cases} y \leq -(x+1)(x-1) \\ y \geq x(x-2) \end{cases}$$

$$\text{②} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ よって}$$



(2) $x+y=k$ (k 実数)とおき、 k の最大最小を求めよ。

$y = -x+k$ より 傾き -1 で、 $\begin{cases} y = -(x+1)(x-1) \\ y = x(x-2) \end{cases}$ に接する

直線をさがす。

$y = -(x+1)(x-1)$ は、 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ で接線 $y = -x + \frac{5}{4}$ をもつ。

$y = x(x-2)$ は、 $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ で接線 $y = -x - \frac{1}{4}$ をもつ。

$$\text{よって } -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{4}$$

最大値 $\frac{5}{4}$

答 最小値 $-\frac{1}{4}$

8

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3\cos 2x + 7\cos x \\
 &= 3(2\cos^2 x - 1) + 7\cos x \\
 &= 6\cos^2 x + 7\cos x - 3 \\
 &= (2\cos x + 3)(3\cos x - 1)
 \end{aligned}$$

よ) $f(x) > 0$ とおきの $\cos x > \frac{1}{3}$ のとき。

$x = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の実数) において $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とおく。

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\pi} -f(x) dx \\
 &= \int_0^{\alpha} 3\cos 2x + 7\cos x dx + \int_{\alpha}^{\pi} -3\cos 2x - 7\cos x dx \\
 &= \left[\frac{3}{2} \sin 2x + 7 \sin x \right]_0^{\alpha} + \left[-\frac{3}{2} \sin 2x - 7 \sin x \right]_{\alpha}^{\pi} \\
 &= 3 \sin 2\alpha + 14 \sin \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha (3 \cos \alpha + 7)
 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} |f(x)| dx &= 2 \sin \alpha (3 \cos \alpha + 7) \\
 &= 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 7 \right) = \frac{32\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\frac{32\sqrt{2}}{3}$$

9

(1) 計算すると、

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 - ab + b & b(a^2 + a + 1 - b) \\ -(a^2 + a + 1 - b) & -(a^3 - ab + b) - 3(a^2 + a + 1 - b) + 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$A^3 = E$ となるには、

$$\begin{cases} a^3 - ab + b = 1 & \text{--- ①} \\ a^2 + a + 1 - b = 0 & \text{--- ②} \end{cases} \text{が必要。}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow b = \frac{a^3 - 1}{a - 1} = a^2 + a + 1 \quad \text{②} \Leftrightarrow b = a^2 + a + 1$$

よって $b = a^2 + a + 1$ が必要。

又、逆に $b = a^2 + a + 1$ のとき

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ となり、十分。}$$

$b = a^2 + a + 1$ は $A^3 = E$ となるのに 必要十分。

(2) (1) が成立する時 $A^3 = E$ より、正の整数 n について

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } A^n = A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a^2 + a + 1 \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } A^n = A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b & -b \\ 1 & -b + a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -a^2 - a - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

である。 2^{k-1} は 3 の倍数でないため、

$$2^{k-1} \equiv 1 \pmod{3} \text{ 又は } 2^{k-1} \equiv 2 \pmod{3}$$

(i) $2^{k-1} \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$2^k = 2^{k-1} \times 2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ より、}$$

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = A^2 + A + E = O$$

(ii) $2^{k-1} \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$2^k = 2^{k-1} \times 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} = A + A^2 + E = O$$

よって (1) が成立する時 すべての自然数 k で $A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$

- (1) $0 < x \leq 1$ のときは $x^a > 0 \geq \log x$ より自明。
 $a > \frac{1}{e}$ $x > 1$ において、 $x^a > x^{\frac{1}{e}}$ で「あとので」。
 $x > 1$ において $x^a > x^{\frac{1}{e}} \geq \log x$ が成り立たない。

$f(x) = x^{\frac{1}{e}} - \log x$ とおくと、

$f'(x) = \frac{1}{e} x^{\frac{1}{e}-1} - \frac{1}{x} = x^{-1} \left(\frac{1}{e} x^{\frac{1}{e}} - 1 \right)$

増減表は下図のようになり。

x	1		e^e	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、 $f(x) \geq f(e^e) = 0$
 となり、 $x^{\frac{1}{e}} - \log x \geq 0$ が成り立つため、
 $a > \frac{1}{e}$ のとき $x > 0$ で $x^a > \log x$

- (2) $a > \frac{1}{e}$ において
 $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x$ を求めたい。

今 $x = \frac{1}{t}$ とおくと、

$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)^a \log \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\log t}{t^a}$

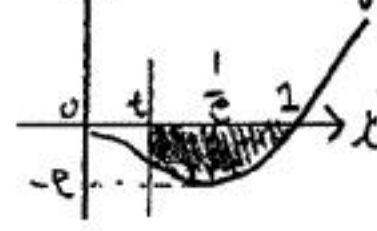
ここで $y = \log t^a = a \log t$ とおくと、

$\frac{\log t}{t^a} = \frac{y}{ae^y}$ $t \rightarrow \infty$ において $a > 0$ より $y \rightarrow \infty$ ので、

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t^a} = 0$ となり、

$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\log t}{t^a} = 0$ は $a > 0$ において常に成立

- (3) $y = x \log x$ 左図の斜線部分を y 軸のまわり)に回転させよ。



$V(t) = \int_t^1 -x \log x \cdot 2x dx = \left[-\frac{2}{3} x^3 \log x + \frac{2}{9} x^3 \right]_t^1$
 $= \frac{2}{9} - \left(-\frac{2}{3} t^3 \log t + \frac{2}{9} t^3 \right)$
 $= \frac{2}{9} (1 - t^3) + \frac{2}{3} t^3 \log t$

より

$\lim_{t \rightarrow +0} V(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2}{9} (1 - t^3) + \frac{2}{3} t^3 \log t$

(2)より $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ より $\lim_{t \rightarrow +0} t^3 \log t = 0$ よって、

$\lim_{t \rightarrow +0} V(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2}{9} (1 - t^3) + \lim_{t \rightarrow +0} t^3 \log t = \frac{2}{9} \pi$ 答 $\frac{2}{9} \pi$



(1) 2^n が100桁 2^{n-1} は99桁より.

$$100 \leq \log_{10} 2^n = n \log_{10} 2 < 101 \quad \text{①である。}$$

$$99 \leq \log_{10} 2^{n-1} = (n-1) \log_{10} 2 < 100 \quad \text{②}$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ なので、

$$\text{①} \Leftrightarrow 332.2 \leq n < 335.6$$

$$\text{②} \Leftrightarrow 328.8 \leq n-1 < 332.3$$

n は自然数なので、この2条件を満たすのは $n=329$ のみ

$$\text{答 } \underline{n=329}$$

(2) 2^n の一の位は 2, 4, 8, 6 と4つごとの周期になっている。

$n=333$ のとき一の位は

$$333 \equiv 1 \pmod{4} \text{より } 2$$

$$\text{答 } \underline{2}$$

(3) 2^k ($k=1, 2, 3, \dots$) の下2桁は

2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96,

92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, ...

となり、周期 20 をとる。

$$\text{よって } n=329=20 \times 16 + 9 \text{ より}$$

2^{329} の下2桁は 12.

したがって 2^{329} の十の位は 1.

$$\text{答 } \underline{1}$$

12-7

(1)

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目
5	(5,0)	(6,1)	(3,2)	(4,3)	(2,4)	(1,5)		
6	(6,0)	(3,1)	(4,2)	(2,3)	(1,4)			
7	(7,0)	(2,1)	(4,2)	(2,3)	(1,4)			
8	(8,0)	(4,1)	(2,2)	(1,3)				

(2)

1001
↓
1010
↓
101
↓
110
↓
11
↓
100
↓
10
↓
1
↓
1

(3) 2^k+1 は 2進法で表すと, $\underbrace{1000\cdots 01}_{k-1\text{個}}$

これに 2回の操作を繰り返すと,

$\begin{cases} k \geq 2 \text{ のときは } \underbrace{10\cdots 01}_{k-2\text{個}} \text{ となる,} \\ k=1 \text{ のときは } 1 \end{cases}$

よって 2^k+1 は 2回操作すると $2^{k-1}+1$ になる。

$k=1$ のとき 終了時の値は

$(3,0) \rightarrow (4,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,3)$

より 3 になるので,

$k \geq 2$ のとき

$$3 + 2(k-1) = 2k+1$$

これは $k=1$ でも成立する。

答 $2k+1$

(1)

(1) z が原点と点 a を通る直線上にある時

$z = \lambda a$ (λ 実数 $\lambda \neq \frac{1}{2}$) と表せる。

このとき代入して,

$$w = \frac{\bar{a}z - 2}{2z - a} = \frac{\lambda \bar{a}a - 2}{2\lambda a - a}$$

a の絶対値 1 より $a\bar{a} = 1$ である。よって

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \bar{a}a - 2}{2\lambda a - a} &= \frac{\lambda - 2}{(2\lambda - 1)a} = \frac{\lambda - 2}{(2\lambda - 1)} \frac{1}{a} \\ &= \frac{\lambda - 2}{2\lambda - 1} \frac{a\bar{a}}{a} = \frac{\lambda - 2}{2\lambda - 1} \bar{a} \end{aligned}$$

$$w = \frac{\lambda - 2}{2\lambda - 1} \bar{a} \text{ となる。}$$

$\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 1}$ は実数であるので, w は $\bar{a}$ の実数倍

よって w は原点と $\bar{a}$ を通る直線上にある。

(2)

$$w = \frac{\bar{a}z - 2}{2z - a} \Leftrightarrow w(2z - a) = \bar{a}z - 2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{aw - 2}{2w - \bar{a}}$$

今 $|z| > 1$ なので, $z\bar{z} > 1$ より,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{aw - 2}{2w - \bar{a}} \cdot \frac{\bar{a}\bar{w} - 2}{2\bar{w} - a} = \frac{a\bar{a}w\bar{w} - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4w\bar{w} - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + a\bar{a}} \\ &= \frac{|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1} > 1 \end{aligned}$$

$dw + \bar{a}\bar{w}$ は $dw + \bar{a}\bar{w} \leq 2|d||w|$ であり

$$4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1 \geq 4|w|^2 - 2 \cdot 2|d||w| + |d|^2$$

(i) $dw \neq |d||w|$ または $|w| \neq \frac{1}{2}$ のとき $= (2|w| - |d|)^2 \geq 0$ より,

$$\frac{|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1} > 1 \Leftrightarrow |w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4 > 4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 < 1$$

(ii) $dw = |d||w|$ かつ $|w| = \frac{1}{2}$ のとき $w = \frac{1}{2}\bar{a}$ だがこれをみたす z はない。
よって、原点を中心とする半径 1 の円内, $w = \frac{1}{2}\bar{a}$ をのぞく。

13 - (7)

(1) 3枚とり出す方法は、

$${}_{12}C_3 = 220 \text{通り}$$

$X=1$ のとき $Y=Z=1$ なので、このようにとり出すは、

$${}_8C_3 = 56$$

よって

$$P(X=1) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

$$\text{答 } \frac{14}{55}$$

(2) $X+Y+Z=0$ とするのは

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{55}$$

$X+Y+Z=1$ は

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_8C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{12}{55}$$

$X+Y+Z=2$ は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_8C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{28}{55}$$

よって

$$E(X+Y+Z) = 0 \times \frac{1}{55} + 1 \times \frac{12}{55} + 2 \times \frac{28}{55}$$

$$= 2$$

$$V(X+Y+Z) = (0-2)^2 \times \frac{1}{55} + (1-2)^2 \times \frac{12}{55} + (2-2)^2 \times \frac{28}{55} + (3-2)^2 \times \frac{14}{55}$$

$$= \frac{6}{11}$$

$$\text{答 } \frac{6}{11}$$

(3) $Y=0$ であるのは、

$${}_4C_3 + {}_4C_2 \times {}_8C_1 = 52 \text{通り}$$

X のうち $Z=1$ なのは

$${}_4C_2 \times {}_8C_1 = 48 \text{通り}$$

よって

$$\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

(7)

(1)

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目
5	(5,0)	(6,1)	(3,2)	(4,3)	(2,4)	(1,5)		
6	(6,0)	(3,1)	(4,2)	(2,3)	(1,4)			
7	(7,0)	(7,1)	(4,2)	(2,3)	(1,4)			
8	(8,0)	(4,1)	(2,2)	(1,3)				

(2) 1001

$$\downarrow$$

$$1010$$

$$\downarrow$$

$$101$$

$$\downarrow$$

$$110$$

$$\downarrow$$

$$11$$

$$\downarrow$$

$$100$$

$$\downarrow$$

$$10$$

$$\downarrow$$

$$1$$

(3) 2^k+1 は2進法で表すと、 $\underbrace{1000 \cdots 01}_{k-1 \text{個}}$

これは2回の操作を繰り返すと、

$$\begin{cases} k \geq 2 \text{ のときは } \underbrace{10 \cdots 01}_{k-2 \text{個}} \\ k=1 \text{ のときは } 1 \end{cases} \text{ となる。}$$

よって 2^k+1 は2回操作すると $2^{k-1}+1$ になる。

$k=1$ のとき 終了時の値は
(3,0) $\rightarrow$ (4,1) $\rightarrow$ (2,2) $\rightarrow$ (1,3)

より3なので、

$$k \geq 2 \text{ のとき } 3 + 2(k-1) = 2k+1$$

これは $k=1$ でも成立する。

$$\text{答 } 2k+1$$

(7)

(1) z が原点と点 a を通る直線上にある時

$$z = l a \quad (l \text{ 実数 } l \neq \frac{1}{2}) \text{ と表せる。}$$

このとき代入して、

$$w = \frac{\bar{a}z - 2}{2z - a} = \frac{l\bar{a}a - 2}{2la - a}$$

a の絶対値1より $a\bar{a}=1$ である。よって

$$\frac{l\bar{a}a - 2}{2la - a} = \frac{l-2}{(2l-1)a} = \frac{l-2}{(2l-1)} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{l-2}{2l-1} \cdot \frac{a\bar{a}}{a} = \frac{l-2}{2l-1} \bar{a}$$

$$w = \frac{l-2}{2l-1} \bar{a} \text{ となる。}$$

$\frac{l-2}{2l-1}$ は実数であるので、 w は $\bar{a}$ の実数倍

よって w は原点と $\bar{a}$ を通る直線上にある。

(2) $w = \frac{\bar{a}z - 2}{2z - a} \Leftrightarrow w(2z - a) = \bar{a}z - 2$

$$\Leftrightarrow z = \frac{aw - 2}{2w - \bar{a}}$$

今 $|z| > 1$ なので、 $z\bar{z} > 1$ よって、

$$z\bar{z} = \frac{aw - 2}{2w - \bar{a}} \cdot \frac{\bar{a}\bar{w} - 2}{2\bar{w} - a} = \frac{a\bar{a}w\bar{w} - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4w\bar{w} - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + a\bar{a}}$$

$$= \frac{|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1} > 1$$

$dw + \bar{a}\bar{w}$ は $dw + \bar{a}\bar{w} \leq 2|d||w|$ であり

$$4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1 \geq 4|w|^2 - 2 \cdot 2|d||w| + |d|^2$$

(i) $dw + \bar{a}\bar{w}$ または $|w| \neq \frac{1}{2}$ のとき $= (2|w| - |d|)^2 \geq 0$ より、

$$\frac{|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4}{4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1} > 1 \Leftrightarrow |w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 4 > 4|w|^2 - 2(dw + \bar{a}\bar{w}) + 1$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 < 1$$

(ii) $dw = |d||w|$ かつ $|w| = \frac{1}{2}$ のとき $w = \frac{1}{2}\bar{a}$ だがこれをみたす z はない

よって、原点を中心とする半径1の円内、 $w = \frac{1}{2}\bar{a}$ をのぞく。