

(1) $\sin A$ を求める. 余弦定理より,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$\Leftrightarrow (5 \sin A)^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos A$$

$$\Leftrightarrow 25 \sin^2 A = 34 - 30 \cos A$$

$$\Leftrightarrow 25(1 - \cos^2 A) = 34 - 30 \cos A$$

$$\Leftrightarrow 25 \cos^2 A - 30 \cos A + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - \cos A - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{3}{5}$$

よって,

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

よって, ①より,

$$\begin{aligned} BC &= 5 \sin A \\ &= 5 \cdot \frac{4}{5} \\ &= \underline{\underline{4}} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)の結果より,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

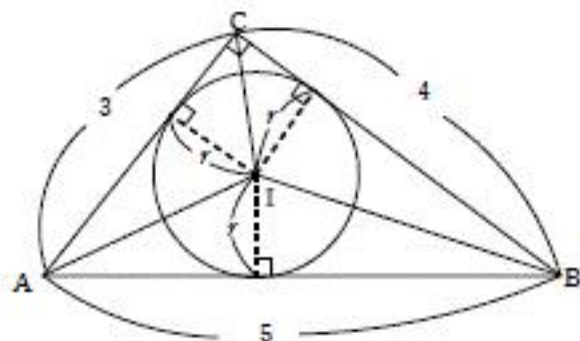
$\Leftrightarrow \triangle ABC$ は, $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である.

さて, $\triangle ABC$ の内心を I , 求める内接円の半径を r とおく. このとき, $\triangle ABC$ の面積について,

$$\triangle ABC = \triangle ABI + \triangle BCI + \triangle CAI$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{r=1}} \quad \dots\dots (\text{答})$$



2

(1) 余弦定理より,

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{7}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ の面積を S とおく. また,

$$CE = x$$

とおく. このとき,

$$\triangle DEC = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{7}} S \quad \dots\dots ①$$

よって,

$$\triangle DEC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{7}} S = \frac{1}{2} S$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \sqrt{7} \quad \because S > 0$$

よって,

$$\begin{aligned} BE &= BC - CE \\ &= \sqrt{7} - \frac{3}{4} \sqrt{7} \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{4}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \triangle ABE = \frac{\sqrt{7} - x}{\sqrt{7}} S \quad \dots\dots ②$$

よって, ①②より,

$$\begin{aligned} T &= (\triangle ABE) \cdot (\triangle DEC) \\ &= \frac{\sqrt{7} - x}{\sqrt{7}} S \cdot \frac{2x}{3\sqrt{7}} S \\ &= \frac{2S^2}{21} \cdot \{(\sqrt{7} - x)x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2S^2}{21} \cdot \left\{ \frac{(\sqrt{7} - x) + x}{2} \right\}^2 \quad \left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{7} - x \\ 0 < x \\ \text{より, 相加相乗平均の不等式を用いた} \end{array} \right] \\ &= \frac{S^2}{6} \end{aligned}$$

等号成立: $\sqrt{7} - x = x$

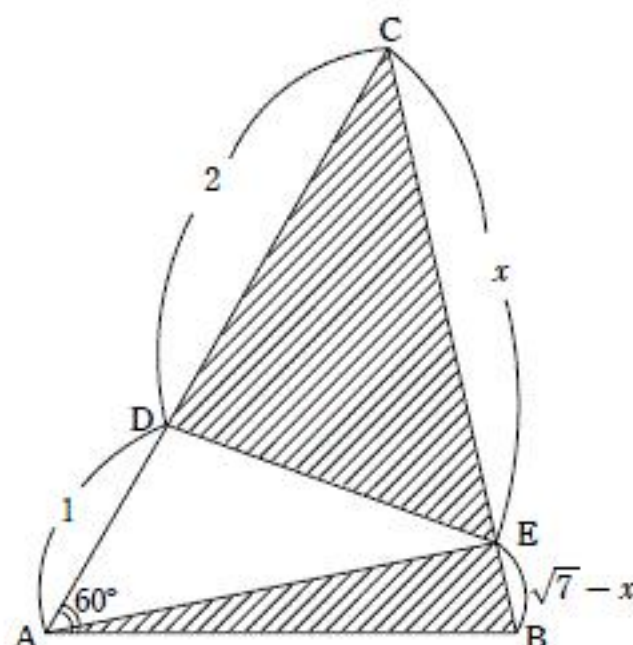
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \left(0 < \frac{\sqrt{7}}{2} < \sqrt{7} \right)$$

よって, T の最大値は,

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{6} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ \right)^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{8}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

また, この時の BE は,

$$\begin{aligned} BE &= \sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(1) 『 x の2次方程式：

$$x^2 - ax - a^2 + 5a = 0 \dots\dots ①$$

には、相異なる実数解が存在する。』

⇔ 『①の判別式 D について、

$$D = (-a)^2 - 4(-a^2 + 5a) > 0$$

が成立する。』

$$\Leftrightarrow 5a(a-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a < 0 \text{ or } 4 < a} \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$$

$$= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}a^2 + 5a$$

したがって、

『 $y = f(x)$ のグラフが、

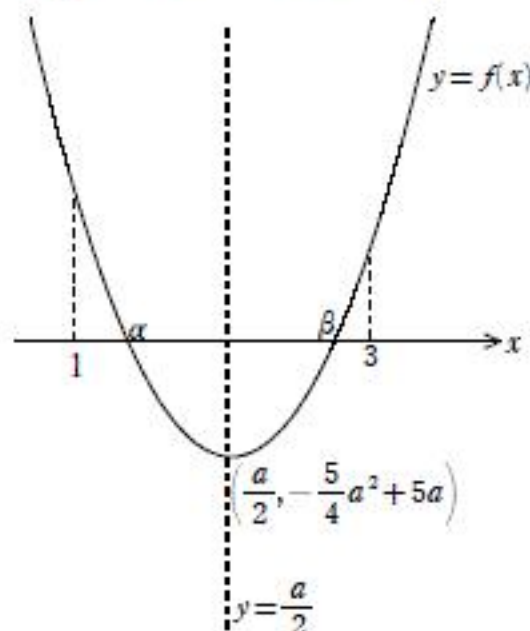
$$1 \leq \alpha < \beta \leq 3$$

を満たす2点 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ を通る。』

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \\ 1 < \frac{a}{2} < 3 \\ f(1) \geq 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4}a^2 + 5a < 0 \\ 2 < a < 6 \\ -a^2 + 4a + 1 \geq 0 \\ -a^2 + 2a + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \text{ or } 4 < a \\ 2 < a < 6 \\ 2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{10} \leq a \leq 1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{4 < a \leq 1 + \sqrt{10}} \dots\dots(\text{答})$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{5} > 1 + \sqrt{10} \text{ の証明} \\ \sqrt{5} > 2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{5} > 4 \Rightarrow 6 + 2\sqrt{5} > 10 \\ \Rightarrow (1 + \sqrt{5})^2 > (\sqrt{10})^2 \Rightarrow 1 + \sqrt{5} > \sqrt{10} \\ \Rightarrow 2 + \sqrt{5} > 1 + \sqrt{10} \end{array} \right]$$



(1) $Z=3$ となるのは取り出したカードの組み合わせが、

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{x} \quad (\text{ただし, } x \text{ は整数で } 3 \leq x \leq 10 \text{ を満たす})$$

となる場合である. よって, 求める確率は,

$$\begin{aligned} & \frac{8}{{}_{10}C_3} \\ &= \frac{8}{\frac{10!}{7!3!}} \\ &= \frac{1}{15} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 最大のカードを除いたカードの組み合わせを, (a, b) と表すことにする.

(a, b) の組み合わせは次の表のようになる.

Z	(a, b)	場合の数	
3	(1,2)	8	8 通り
4	(1,3)	7	7 通り
5	(1,4)	6	13 通り
	(2,3)	7	
6	(1,5)	5	11 通り
	(2,4)	6	
7	(1,6)	4	15 通り
	(2,5)	5	
	(3,4)	6	
8	(1,7)	3	12 通り
	(2,6)	4	
	(3,5)	5	
9	(1,8)	2	14 通り
	(2,7)	3	
	(3,6)	4	
	(4,5)	5	
10	(1,9)	1	10 通り
	(2,8)	2	
	(3,7)	3	
	(4,6)	4	
11	(2,9)	1	10 通り
	(3,8)	2	
	(4,7)	3	
	(5,6)	4	
12	(3,9)	1	6 通り
	(4,8)	2	
	(5,7)	3	
13	(4,9)	1	6 通り
	(5,8)	2	
	(6,7)	3	
14	(5,9)	1	3 通り
	(6,8)	2	
15	(6,9)	1	3 通り
	(7,8)	2	
16	(7,9)	1	1 通り
17	(8,9)	1	1 通り

したがって, 求める期待値は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{{}_{10}C_3} (3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 12 + 9 \cdot 14 \\ & \quad + 10 \cdot 10 + 11 \cdot 10 + 12 \cdot 6 + 13 \cdot 6 + 14 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 17 \cdot 1) \\ &= \frac{990}{120} \\ &= \frac{33}{4} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(1) \quad g(x) = -x^2 + ax + b$$

$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b$$

$$g'(x) = -2x + a$$

$y = g(x)$ のグラフは上に凸であるから、

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の一つの接点 P の x 座標は、 $x < 1$ を満たし、

もう一つの接点 Q の x 座標は、 $x > 1$ を満たす。したがって、

(I) P について、

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -x^2 + ax + b \\ 1 = -2x + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-1) & \dots\dots ① \\ b = -\frac{1}{4}(a-1)^2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(II) Q について、

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = g\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{a^2}{4} + b \quad \dots\dots ③$$

よって、②③より、

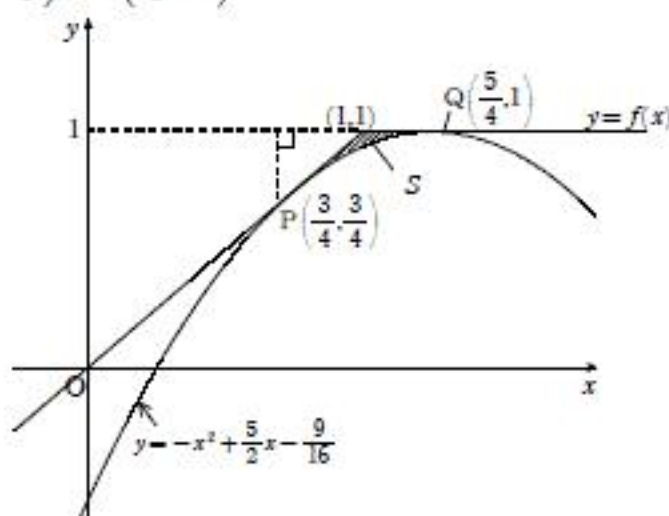
$$\begin{cases} b = -\frac{1}{4}(a-1)^2 \\ 1 = \frac{a^2}{4} + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{16}\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) ①と(1)の結果より、接点は、

$$P\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), Q\left(\frac{5}{4}, 1\right)$$

となる。



求める面積 S は図の斜線部分である。

よって、

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \left[1 - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} \right) \right] dx - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} \right) dx - \frac{1}{2^5}$$

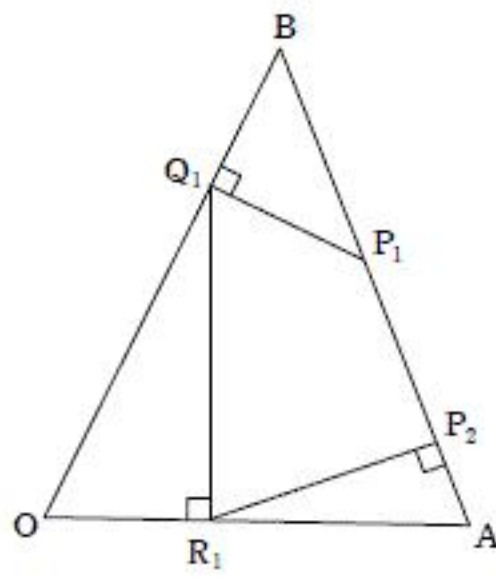
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{16}x \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2^5}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^3 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] - \frac{5}{4} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right] + \frac{25}{16} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2^5}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{49}{2^5} - \frac{5}{4} + \frac{25}{2^5} - \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^5} \left(\frac{49}{3} - 5 \cdot 2^3 + 25 - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2^5} \left(\frac{49}{3} - 16 \right)$$

$$= \frac{1}{96} \quad \dots\dots (\text{答})$$



初めに, $AB, \cos \angle OAB, \cos \angle ABO, \cos \angle BOA$ を調べる.

$$\begin{aligned}\cos \angle BOA &= \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| |\overline{OB}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ AB &= \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2|\overline{OA}| |\overline{OB}| \cos \angle BOA} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}} \\ &= \sqrt{3} \\ \cos \angle OAB &= \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \because |\overline{OB}| = |\overline{AB}| \\ \cos \angle ABO &= \frac{\overline{BO} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BO}| |\overline{BA}|} = \frac{\overline{BO} \cdot (-\overline{OB} + \overline{OA})}{|\overline{BO}| |\overline{BA}|} \\ &= \frac{|\overline{BO}|^2 - \overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{BO}|^2} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1) \quad \overline{BQ_1} &= \frac{|\overline{BP_1}| \cos \angle ABO}{|\overline{OB}|} (-\overline{OB}) \\ &= \frac{(1-t_1) |\overline{AB}| \cos \angle ABO}{|\overline{OB}|} (-\overline{OB}) \\ &= \frac{(1-t_1) \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{3}} (-\overline{OB}) \\ &= -\frac{2}{3} (1-t_1) \overline{b} \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $\overline{OQ_1}, \overline{OR_1}, \overline{AR_1}, \overline{AR_2}$ の順で求める.

$$\begin{aligned}\overline{OQ_1} &= \overline{OB} + \overline{BQ_2} \\ &= \left\{ 1 - \frac{2}{3} (1-t_1) \right\} \overline{b} \quad \because (1) \\ &= \frac{1}{3} (1+2t_1) \overline{b}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\overline{OR_1} &= \frac{|\overline{OQ_1}| \cos \angle BOA}{|\overline{OA}|} \overline{OA} \\ &= \frac{\frac{1}{3} (1+2t_1) \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} \overline{OA} \\ &= \frac{1}{6} (1+2t_1) \overline{a}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\overline{AR_1} &= -\overline{OA} + \overline{OR_1} \\ &= \left\{ -1 + \frac{1}{6} (1+2t_1) \right\} \overline{a} \\ &= \frac{1}{6} (-5+2t_1) \overline{a}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\overline{AP_2} &= \frac{|\overline{AR_1}| \cos \angle OAB}{|\overline{AB}|} \overline{AB} \\ &= \frac{\frac{1}{6} (5-2t_1) \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} \overline{AB} \quad \because [0 < t_1 < 1 \Rightarrow -5+2t_1 < 0] \\ &= \frac{1}{18} (5-2t_1) \overline{AB} \\ &= \frac{1}{18} (5-2t_1) (-\overline{a} + \overline{b})\end{aligned}$$

よって,

$$\underline{\underline{t_2 = \frac{1}{18} (5-2t_1) \quad \dots\dots (\text{答})}}$$

(3) (2) の議論で $t_1 \longrightarrow t_{n-1}, t_2 \longrightarrow t_n$ と置き換えると,

$$t_n = \frac{1}{18} (5-2t_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow t_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9} \left(t_{n-1} - \frac{1}{4} \right)$$

これは, 数列 $\left\{ t_n - \frac{1}{4} \right\}$ は, 公比 $-\frac{1}{9}$, 初項 $\left\{ t_1 - \frac{1}{4} \right\}$ の等比数列であることを示している. よって,

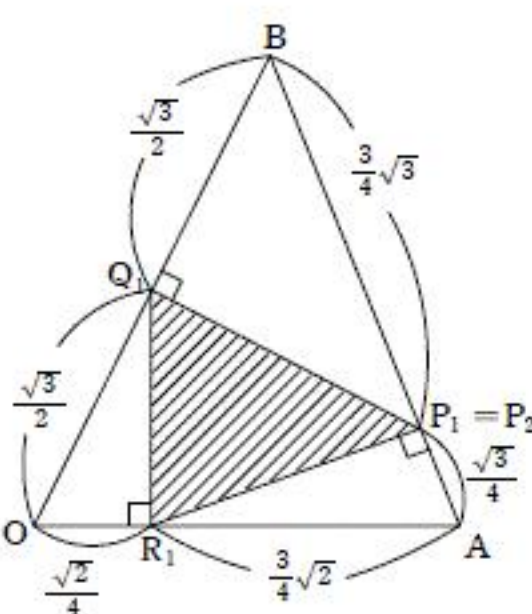
$$\underline{\underline{t_n = \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1} \left(t_1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (\text{答})}}$$

(4) $P_1 = P_2$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{18} (5-2t_1) \quad \because (2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{t_1 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots (\text{答})}}$$

(5)



$\triangle OAB, \triangle OR_1Q_1, \triangle R_1AP_1, \triangle P_1BQ_1$ の面積を計算する.

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle OR_1Q_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle R_1AP_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2} \\ &= \frac{3}{32} \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle R_1BP_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} \\ &= \frac{3}{16} \sqrt{5}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\triangle P_1Q_1R &= \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{\sqrt{5}}{16} + \frac{3}{32} \sqrt{5} + \frac{3}{16} \sqrt{5} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{32} \sqrt{5} \quad \dots\dots (\text{答})}}\end{aligned}$$

$$(1) \quad f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x) = 2a \cos x (-\sin x) + b(-\sin x)$$

仮定より,

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \quad \dots\dots ②$$

よって, ②より①の c を消去して,

$$f(x) = a(\cos^2 x - 1) + b(\cos x - 1)$$

さて, $f(x)$ は, 周期 2π の周期関数であるので, 以下では, $0 \leq x < 2\pi$ を仮定して議論する.

『 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と接する』

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x - 1) \cdot \{a(\cos x + 1) + b\} = 0 \\ (-\sin x) \cdot (2a \cos x + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ or } \cos x = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) & \dots\dots ④ \\ x = 0 \text{ or } \pi \text{ or } \cos x = -\frac{b}{2a} & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

よって, ④⑤の解の組み合わせは次の5通りが考えられる.

(I) $x = 0$ の場合

これは確かに③の解である.

$$(II) \quad \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \text{ の場合}$$

この場合も $x = 0$ は③の解である. さらにこの場合には,

$$\cos 0 = -\frac{b}{2a} = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) \text{ が成立している.}$$

$$(III) \quad \begin{cases} \cos x = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \text{ の場合}$$

この場合も $x = 0$ は③の解である. さらにこの場合には,

$$\cos 0 = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{2a} \text{ が成立している.}$$

$$(IV) \quad \begin{cases} \cos x = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) \\ x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{b}{a} = 0 \end{cases} \text{ の場合}$$

これは $b \neq 0$ に反するので不適である.

$$(V) \quad \begin{cases} \cos x = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) \\ \cos x = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \text{ の場合}$$

この場合も $x = 0$ は③の解である.

以上, (I) ~ (V) より,

$$③ \Leftrightarrow ④ \text{ かつ } ⑤$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2n\pi \quad (\text{ただし, } n \text{ は整数})}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 仮定より

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \{a(\cos^2 x - 1) + b(\cos x - 1)\} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left\{ a \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 \right) + b(\cos x - 1) \right\} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a}{2} (\cos 2x - 1) + b(\cos x - 1) \right\} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - x \right) + b(\sin x - x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - 2\pi \right) + b(0 - 2\pi) - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2b \quad \dots\dots ⑥$$

よって, ⑥より a を消去して,

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2b)(\cos^2 x - 1) + b(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)\{(-2)(\cos x + 1) + 1\} = 0 \quad \because b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(-2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ or } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \text{ or } 2\pi \text{ or } \frac{2}{3}\pi \text{ or } \frac{4}{3}\pi}}$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2\pi \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\iff (x-t)^2 + (y-t)^2 = 2t^2 - at + 4$$

$$\iff (x-t)^2 + (y-t)^2 = 2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 + 4 - \frac{a^2}{8}$$

したがって、

『任意の実数 t に対して、方程式①が円を表す』

$$\iff 4 - \frac{a^2}{8} > 0$$

$$\iff -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 求める領域を Ω_4 とおく。このとき、

$$(x, y) \in \Omega_4$$

$$\iff \text{『} x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 4) = 0 \text{ を満たす } t > 0 \text{ が存在する』} \dots\dots(*)$$

したがって、

(I) $2x + 2y - 4 = 0$ の場合

$$(*) \iff \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (2, 0) \text{ or } (0, 2) \quad \dots\dots ②$$

(II) $2x + 2y - 4 \neq 0$ の場合

$$(*) \iff \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 4} > 0$$

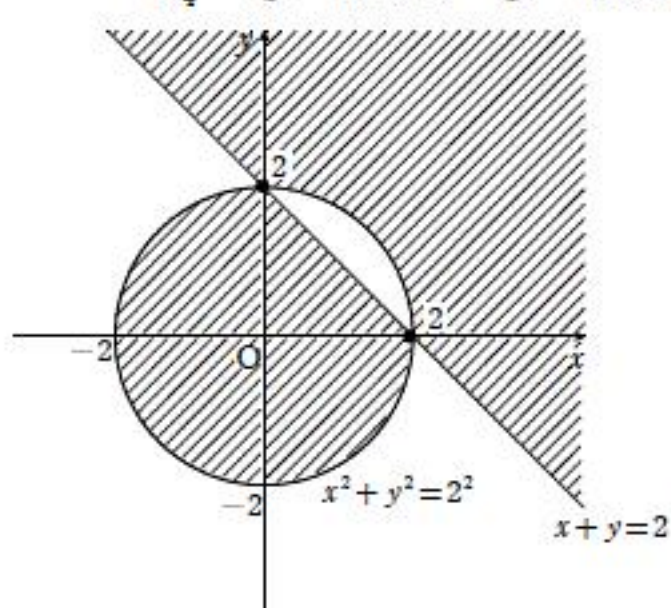
$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 4 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

または、

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 4 < 0 \\ x^2 + y^2 - 4 < 0 \end{cases} \quad \dots\dots ④$$

よって、

$$\Omega_4 = ② \text{ または } ③ \text{ または } ④$$



求める領域 Ω_4 は左図の斜線部分である。ただし境界線は含まないが黒丸 $(2, 0)$, $(0, 2)$ は含む。

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 6) = 0$$

$$\iff (x-t)^2 + (y-t)^2 = 2(t-1)(t-2) \quad \dots\dots ⑤$$

よって、

『 $t > 0$ かつ方程式⑤が円を表す。』

$$\iff \begin{cases} t > 0 \\ 2(t-1)(t-2) > 0 \end{cases}$$

$$\iff 0 < t < 1 \text{ or } 2 < t \quad \dots\dots ⑥$$

求める領域を Ω_6 とおく。このとき、 $(x, y) \in \Omega_6$

$$\iff \text{『} x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 6) = 0 \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在し、⑥を満たす』} \dots\dots(*)$$

したがって、

(I) $2x + 2y - 6 = 0$ の場合

$$(*) \iff \begin{cases} 2x + 2y - 6 = 0 & \dots\dots ⑦ \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & \dots\dots ⑧ \end{cases}$$

しかし、⑧の中心 $(0, 0)$ と直線⑦との距離 d が、

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 2 \quad (\text{⑧の半径})$$

となり、この場合は $(*)$ が成立しない。

(II) $2x + 2y - 6 \neq 0$ の場合

$$(*) \iff 0 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 6} < 1$$

または

$$2 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 6}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 6 > 0 \\ 0 < x^2 + y^2 - 4 < 2x + 2y - 6 \end{cases}$$

または、

$$\begin{cases} 2x + 2y - 6 > 0 \\ 2(2x + 2y - 6) < x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$$

または、

$$\begin{cases} 2x + 2y - 6 < 0 \\ 0 > x^2 + y^2 - 4 > 2x + 2y - 6 \end{cases}$$

または、

$$\begin{cases} 2x + 2y - 6 < 0 \\ 2(2x + 2y - 6) > x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 6 > 0 \\ 4 < x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 0 \end{cases} \quad \text{空集合}$$

または、

$$\begin{cases} 2x + 2y - 6 < 0 \\ 0 < (x-2)^2 + (y-2)^2 \end{cases} \quad \dots\dots ⑨$$

または、

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 6 < 0 \\ 4 > x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 > 0 \end{cases} \quad \dots\dots ⑩$$

または、

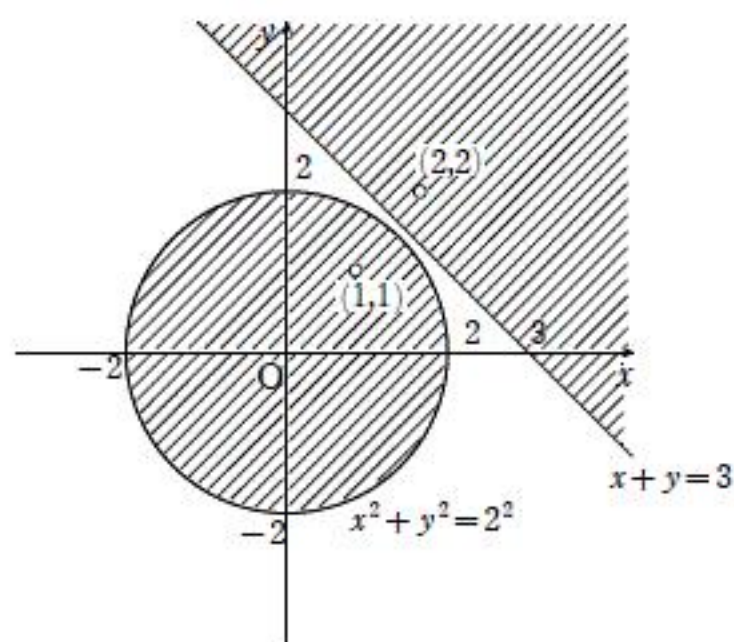
$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 6 > 0 \\ 0 > (x-2)^2 + (y-2)^2 \end{cases} \quad \text{空集合}$$

よって、

$$\Omega_6 = ⑨ \text{ または } ⑩$$

となる。求める領域 Ω_6 は図示すると、次の斜線部分となる。

ただし境界線と白丸 $(1, 1)$, $(2, 2)$ は含まない。



初項 a の値で次のように場合分けする.

(I) $2 \leq a$ の場合

この場合, 任意の自然数 n について,

$$a_n \geq 2 \quad \cdots \cdots (*)$$

が成立することを, n についての数学的帰納法を用いて証明する:

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 > a \geq 2$$

より, 確かに $(*)$ は成立している.

(ii) $n=k$ のとき

$$a_k \geq 2$$

と仮定する.

(iii) $n=k+1$ のとき

帰納法の仮定より,

$$a_k - 1 \geq 1$$

よって,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= |a_k - 1| + a_k - 1 \\ &\geq 1 + 2 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

これは $n=k+1$ のときも, $(*)$ が成立することを示している. したがって, 数学的帰納法の原理により, 任意の自然数 n について $(*)$ が成立することが証明された. //

よって, この場合は, 題意を満たす.

(II) $a \leq 1$ の場合

$$a_1 - 1 \leq 0$$

より, $a_2 = |a_1 - 1| + a_1 - 1$

$$= -(a_1 - 1) + a_1 - 1$$

$$= 0$$

よって, この場合は題意を満たさない.

(III) $1 < a < 2$ の場合

$a_m \leq 1$ を満たす自然数 m が存在することを証明する.

任意の自然数 n について,

$$1 < a_n$$

が成立すると仮定する. このとき,

$$0 < a_n - 1$$

より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= |a_n - 1| + a_n - 1 \\ \iff a_{n+1} &= a_n - 1 + a_n - 1 \\ \iff a_{n+1} - 2 &= 2(a_n - 2) \end{aligned}$$

これは, 数列 $\{a_n - 2\}$ が, 公比 2, 初項 $(a_1 - 2)$ の等比数列であることを示している. よって,

$$a_n - 2 = 2^{n-1}(a_1 - 2)$$

$$\iff a_n = 2^{n-1}(a_1 - 2) + 2$$

ところが,

$$a - 2 < 0$$

より, 十分大きな $N \left(N > \left\lceil \log_2 \frac{2}{2-a} \right\rceil + 1 \text{ でよい} \right)$ を取ると,

$$n > N \implies a_n < 0$$

となる. これは $1 < a_n$ に矛盾する. したがって,

$$a_m \leq 1$$

を満たす自然数 m が存在する. //

よって,

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= |a_m - 1| + a_m - 1 \\ &= -(a_m - 1) + a_m - 1 \quad \because a_m - 1 \leq 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, この場合は題意を満たさない.

以上, (I)(II)(III)より, 求める a の範囲は,

$$\underline{\underline{2 \leq a}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$