

①

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= a \left(x - \frac{a+1}{a} \right)^2 - \frac{(a+1)^2}{a} + 1 \\
 &= a \left(x - \left(1 + \frac{1}{a} \right) \right)^2 - \frac{a^2 + a + 1}{a} \\
 \text{よって、頂点は} &\left(1 + \frac{1}{a}, - \left(a + 1 + \frac{1}{a} \right) \right)
 \end{aligned}$$

(2) $a > 0$ だからグラフは下に凸で、 $1 + \frac{1}{a} > 1$ である.

・ $1 < 1 + \frac{1}{a} \leq 2$, すなわち $a \geq 1$ のとき

軸は区間内にあるから

$$\text{最小値} \quad f\left(1 + \frac{1}{a}\right) = -\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{最大値} \quad f(0) = 1$$

・ $2 < 1 + \frac{1}{a}$, すなわち $0 < a < 1$ のとき

軸は区間の右側にあるから

$$\text{最小値} \quad f(2) = -3$$

$$\text{最大値} \quad f(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{以上から} \quad \text{最小値} \quad &\begin{cases} -3 & (0 < a < 1) \\ -\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right) & (1 \leq a) \end{cases} \quad \dots(\text{答}) \\
 \text{最大値} \quad &1
 \end{aligned}$$

(1) $n = 2p + 1$ (p は整数) と表せて

$$\begin{aligned}n^2 - 1 &= (n + 1)(n - 1) \\&= (2p + 2) \cdot 2p \\&= 4p(p + 1)\end{aligned}$$

$p, p + 1$ は隣接する 2 整数だから $p(p + 1)$ は 2 の倍数,
よって $n^2 - 1$ は 8 の倍数.

(2) $n^5 - n = n(n^4 - 1)$

$$= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$$

$n - 1, n, n + 1$ は隣接する 3 整数だから
 $(n - 1)n(n + 1)$ は 3 の倍数,
よって $n^5 - n$ は 3 の倍数.

③ 円 O_2 の中心をDとする.

(1) $r=3$ のとき

$AB=4$, $BD=3$, $AD=5$ であるから,
 $\triangle ABD$ は $\angle ABO=90^\circ$ の直角三角形.

したがって $\triangle ABO$ も直角三角形で,

$$AO=\sqrt{AB^2+BO^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$\cos\theta=\frac{OB}{AO}=\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{となる.} \quad \dots(\text{答})$$

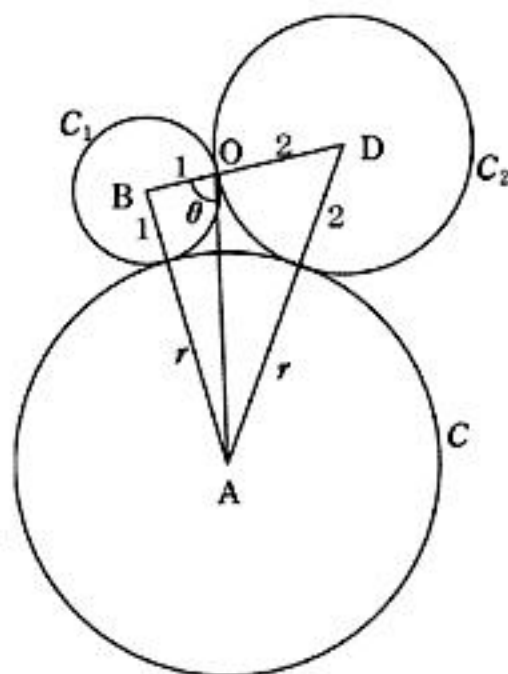
(2) $\angle ABO=\beta$ とする. $\triangle ABD$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{AB^2+BD^2-DA^2}{2AB\cdot BD} \\ &= \frac{(r+1)^2+(1+2)^2-(2+r)^2}{2(r+1)(1+2)} \\ &= \frac{-2r+6}{6(r+1)} \\ &= \frac{3-r}{3(r+1)}\end{aligned}$$

$\triangle AOB$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}AO^2 &= BA^2+BO^2-2BA\cdot BO\cos\beta \\ &= (r+1)^2+1^2-2(r+1)\cdot 1\cdot \frac{3-r}{3(r+1)} \\ &= r^2+2r+2-\frac{2}{3}(3-r) \\ &= r\left(r+\frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\text{よって } AO=\sqrt{r\left(r+\frac{8}{3}\right)} \quad \dots(\text{答})$$



<注> 与えられた θ を用いての処理はかえって自然でないと思われるが,
 これに沿うと次のようになる.

<別解> $\angle DOA=180^\circ-\theta$ であるから

$$\cos\angle DOA=-\cos\theta$$

$AO=x$ において, $\triangle AOB, \triangle AOD$ に余弦定理を用いると,

$$\frac{x^2+1-(1+r)^2}{2\cdot x\cdot 1}=-\frac{x^2+2^2-(2+r)^2}{2\cdot x\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-r(r+2))=-(x^2-r(r+4))$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=2r(r+2)+r(r+4)$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}r(3r+8)$$

$$=r\left(r+\frac{8}{3}\right)$$

$$\text{よって } x=\sqrt{r\left(r+\frac{8}{3}\right)} \quad \dots(\text{答})$$

取り出されたカードの数の和を p , 取り出されなかったカードの数の和を q とする.

$$(1) X = p - q = -8$$

$$\text{一方, } p + q = 28 \quad (\text{総和})$$

$$\text{であるから, } \begin{cases} p = 10 \\ q = 18 \end{cases}$$

$$p = 1 + 2 + 3 + 4, \quad q = 5 + 6 + 7 \quad \text{となるほかなく}$$

$$p(X = -8) = \frac{1}{{}_7C_4} = \frac{1}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{35} \quad \dots(\text{答})$$

$$(2) \begin{cases} p + q = 28 \\ p - q < 0 \end{cases} \quad \text{から}$$

$$p < 14, \quad q > 14$$

ここでは q を考えて,

取り出されなかったカードの組合せは,

$$(7, 6, 5), (7, 6, 4), (7, 6, 3), (7, 6, 2),$$

$$(7, 5, 4), (7, 5, 3), (6, 5, 4)$$

の 7 通り. よって,

$$p(X < 0) = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} \quad \dots(\text{答})$$

(3) 4 枚のカードを取り出すとき, 7 が含まれる確率は,

$$\frac{{}_1 \cdot {}_6C_3}{{}_7C_4} = \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{4}{7}$$

7 が含まれない確率は, $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ である.

$$\begin{aligned} \text{期待値 } E(X) &= E(p - q) \\ &= E(p) - E(q) \end{aligned}$$

$$\text{における 7 の寄与分は, } \frac{4}{7} \cdot 7 - \frac{3}{7} \cdot 7 = \left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7} \right) \cdot 7 = 1$$

他の数についても同様だから

$$\begin{aligned} E(X) &= \left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7} \right) (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \\ &= \frac{1}{7} \cdot 28 \\ &= 4 \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

<注> この考えはやや難しいが, 「まとめて計算する」 考えがあれば自然に到達できるだろう. そうでなければ, 35 通りのすべてを書き出す方針となるほかない.

絶対値は負でないから、実数解が存在するために

$$a+1 \geq 0$$

$\Leftrightarrow a \geq -1$ が必要. このもとで

$$|x^2 + ax + 2a| = a+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + 2a = \pm(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 = 0 \dots \textcircled{1} \\ \text{または} \\ x^2 + ax + 3a + 1 = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②が共通解をもつのは2式の差を考えて $a = -1$ のときに限る.
このときは

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2} \text{ で, } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2, -1 \text{ で2実数解をもつ.}$$

$a > -1$ のとき, ①, ②の判別式 D_1, D_2 について

$$D_1 = a^2 - 4(a-1)$$

$$= (a-2)^2$$

$$D_2 = a^2 - 4(3a+1)$$

$$= a^2 - 12a - 4$$

$$= (a - (6 - 2\sqrt{10}))(a - (6 + 2\sqrt{10}))$$

となるから

$$-1 < 6 - 2\sqrt{10} < 0 < 2 < 6 + 2\sqrt{10}$$

に注意して

a	(-1)	$\cdots$	$6 - 2\sqrt{10}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$6 + 2\sqrt{10}$	$\cdots$
D_1	+	+	+	+	0	+	+	+
D_2	+	+	0	-	-	-	0	+

$D_1 > 0$ かつ $D_2 < 0$, すなわち $6 - 2\sqrt{10} < a < 2$ または
 $2 < a < 6 + 2\sqrt{10}$ のとき条件をみたす.

以上から, $a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 2, 2 < a < 6 + 2\sqrt{10}$

[6]

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 1$$

$$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BE}$$

$$|\overrightarrow{BE}| = 2 \quad \text{が成り立っている.}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BE} \quad \text{であり,}$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AC}))$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AC}|^2$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2 - (|\overrightarrow{BE}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) + 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 3^2 - (2^2 + 1^2) + 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 4 + 2\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\text{ここで, } -|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{AC}| \leq \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} \leq |\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{AC}|$$

$$\text{すなわち } -2 \leq \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} \leq 2$$

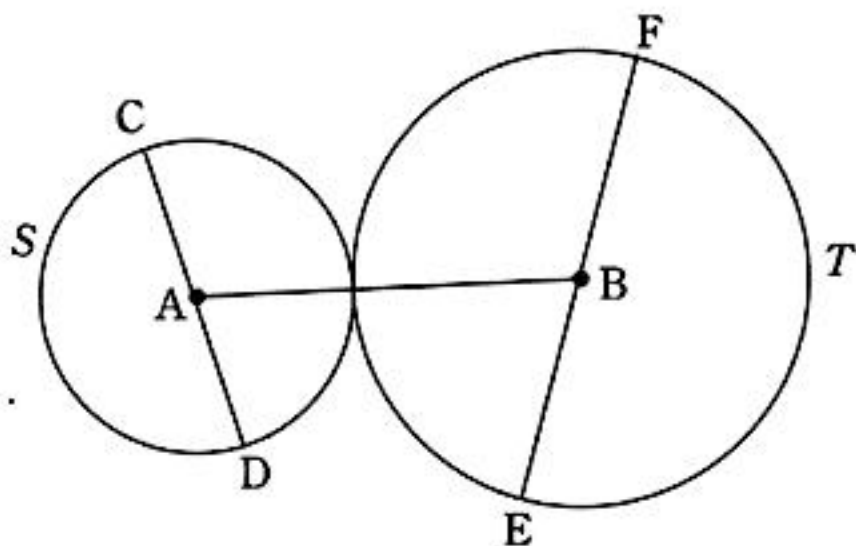
$$\text{であるから } 0 \leq \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF} \leq 8$$

$$\text{最大値 } 8$$

$$\text{最小値 } 0$$

<注> $CD \parallel EF$ のときに最大・最小は実現し,

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{CD}$ のとき最大, $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{CD}$ のとき最小となる.



(1) $n = 2p + 1$ (p は整数) と表せて

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$

$$= (2p + 2) \cdot 2p$$

$$= 4p(p + 1)$$

$p, p + 1$ は隣接する 2 整数だから $p(p + 1)$ は 2 の倍数,
よって $n^2 - 1$ は 8 の倍数.

(2) $n^5 - n = n(n^4 - 1)$

$$= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$$

$n - 1, n, n + 1$ は隣接する 3 整数だから

$(n - 1)n(n + 1)$ は 3 の倍数,

よって $n^5 - n$ は 3 の倍数.

(3) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ であることから,

(a) 8 の倍数であること

(b) 5 の倍数であること を示す.

(a) $n = 2p + 1$ (p は整数) と表すとき,

$$n - 1 = 2p$$

$$n + 1 = 2(p + 1)$$

$$n^2 + 1 = 2(2p^2 + 2p + 1) \quad \text{であるから}$$

$n^5 - n$ は 8 の倍数である.

(b) t を整数として,

$n = 5t, 5t \pm 1, 5t \pm 2$ のいずれかの形に表される.

・ $n = 5t$ のとき $n, n = 5t \pm 1$ のとき

$n \mp 1$ が 5 の倍数だから $n^5 - n$ は 5 の倍数.

・ $n = 5t \pm 2$ のとき,

$$n^2 + 1 = (5t \pm 2)^2 + 1$$

$$= 25t^2 \pm 20t + 5$$

$$= 5(5t^2 \pm 4t + 1)$$

が 5 の倍数だから $n^5 - n$ は 5 の倍数.

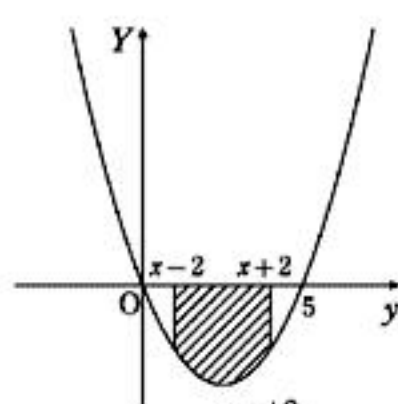
以上と(2)から, $n^5 - n$ は 120 の倍数

$g(y) = y(y-5)$ とおくと,

$f(x)$ は $Y=g(y)$ のグラフと y 軸が区間 $[x-2, x+2]$ (幅 4) の間ではさむ部分の面積である.

・ $0 \leq x-2 < x+2 \leq 5$ すなわち $2 \leq x \leq 3$ のとき,

区間全体で $g(y) \leq 0$ であるから,



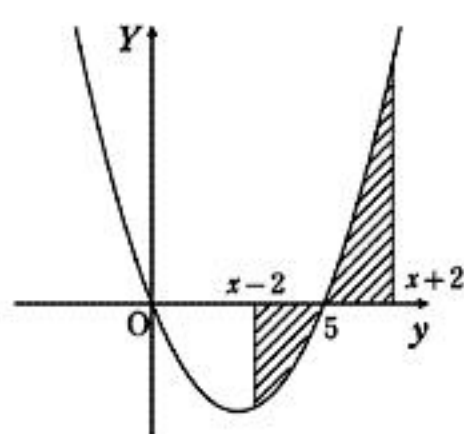
$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_{x-2}^{x+2} y(y-5) dy \\ &= -\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{5}{2}y^2 \right]_{x-2}^{x+2} \\ &= -\frac{1}{3}((x+2)^3 - (x-2)^3) + \frac{5}{2}((x+2)^2 - (x-2)^2) \\ &= -\left(4x^2 - 20x + \frac{16}{3} \right) = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{59}{3} \end{aligned}$$

・ $x-2 \leq 5 \leq x+2$ すなわち $3 \leq x \leq 7$ のとき,

$x-2 \leq y \leq 5$ で $g(y) \leq 0$

$5 \leq y \leq x+2$ で $g(y) \geq 0$

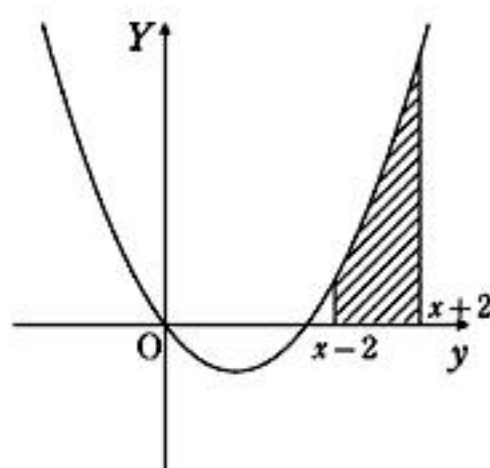
であるから,



$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_{x-2}^5 y(y-5) dy + \int_5^{x+2} y(y-5) dy \\ &= -\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{5}{2}y^2 \right]_{x-2}^5 + \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{5}{2}y^2 \right]_5^{x+2} \\ &= \frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{5}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{5}{2}(x-2)^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{3} \cdot 5^3 - \frac{5}{2} \cdot 5^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + \frac{65}{3} \end{aligned}$$

・ $5 \leq x-2$ すなわち $7 \leq x$ のとき,

$f(x)$ は単調増加だから, $x=7$ を前の場合に含めてこの場合を考えないでよい.



$$f(x) = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{59}{3} \quad (2 \leq x \leq 3) \text{ の最小値は } x=2, 3 \text{ で起こるから}$$

この場合も考えなくてよく

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + \frac{65}{3} \quad (3 \leq x \leq 7) \text{ について}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-1)(x-4)$$

x	3		4		7
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			極小		

$x=4$ のとき最小となり,

$$f(4) = \frac{128}{3} - 80 + 32 + \frac{65}{3} = \frac{49}{3}$$

以上から, 最小値は $f(4) = \frac{49}{3}$

<注> $x=4$ のとき

$$|g(2)| = |g(6)| = 6 \text{ である.}$$

いわゆる「はみ出しけずり論法」により, このときに最小となることは納得できる.

(ただし, このことから解答を組み立てるのは容易でない)

⑨ $f'(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

(1) 接点の x 座標を $x = s, t$ ($s < t$) として

$$f'(s)f'(t) = -1 \text{ となるときであるが}$$

$$|f'(u)| = \frac{1}{2} \left| u + \frac{1}{u} \right| \geq \sqrt{|u| \cdot \frac{1}{|u|}} = 1$$

であるから, $f'(s) = -1f'(t), f'(t) = 1$ ($s < 0 < t$)
となるほかない.

等号成立条件 $|x| = \frac{1}{|x|}$ を考えて,

$$s = -1, t = 1$$

$$u = s, t \text{ を } y - f(u) = f'(u)(x - u) \text{ に代入して}$$

2 接線は $y = -x, y = x$

(2) $l: y - f(u) = f'(u)(x - u)$ ($u > 0$)

が $(x, y) = (0, 0)$ を通るとき

$$f'(u)u = f(u)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(u^2 + 1) = \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}\log u + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \log u = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$$

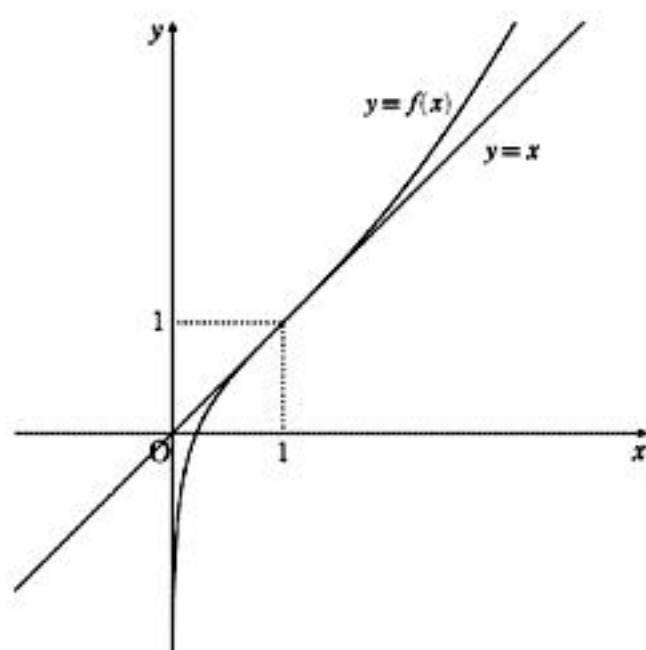
$$g(u) = \log u - \frac{1}{2}(u^2 - 1) \text{ とすると}$$

$$g'(u) = \frac{1 - u^2}{u}$$

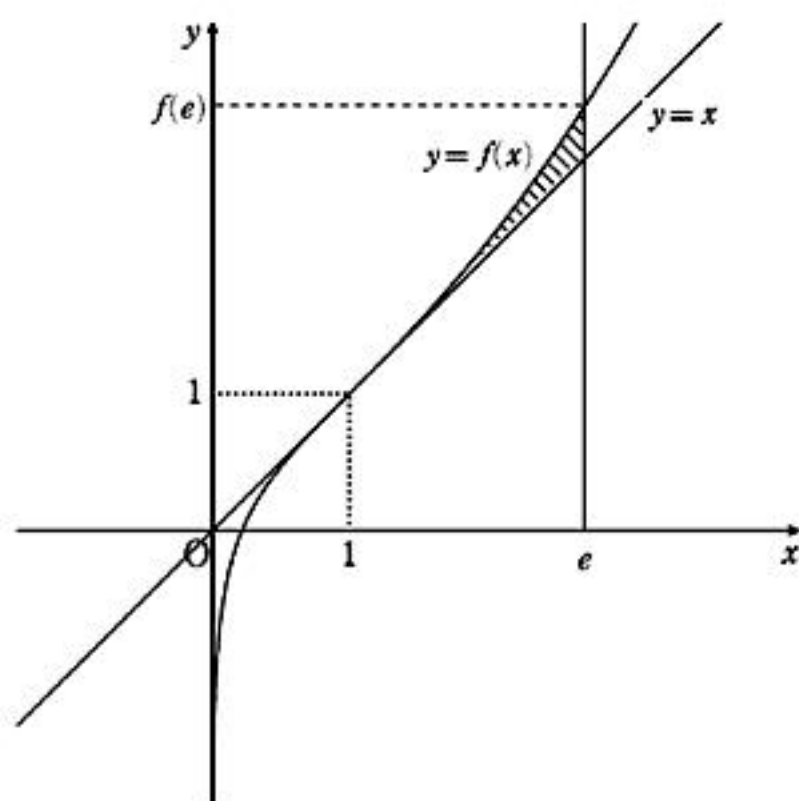
u	$(+0)$		1	
$g'(u)$		+	0	-
$g(u)$			極大	

この増減と $g(1) = 0$ から
 $g(u) = 0$ の解は $u = 1$ だけで,
このとき $l: y = x$

(3) (2)の経過と $f'(x)$ の値の変化に注意して $x > 0$ での $y = f(x)$ の概形は下図のようになる.



よって面積を求める図形の概形は下図のようになり,



$$\text{面積は } \int_1^e (f(x) - x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x(\log x - 1) + \frac{3}{4}x \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x \log x \right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{12} - \frac{e^2}{2} + \frac{e}{4} + \frac{e}{2} \cdot 1 - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{12}(e^3 - 6e^2 + 9e + 2) \quad \dots(\text{答})$$

$$\boxed{10} \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \leq 0$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dy}{d\theta} &= 2\cos\theta(-\sin\theta) \cdot \tan\frac{\theta}{2} + \cos^2\theta \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= -\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \left(4\sin\theta \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta \right) \\ &= -\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} (2\sin^2\theta - \cos\theta) \\ &= \frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} (2\cos^2\theta + \cos\theta - 2) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } 2t^2 + t - 2 = 0 \text{ の解が } t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

であるから, これを $t = p, q$ ($p < q$) として

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} (\cos\theta - p)(\cos\theta - q)$$

$$\cos\theta, \cos^2\frac{\theta}{2} > 0$$

また $p < 0 < q < 1$ であることに注意すると

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\searrow$	q	$\searrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

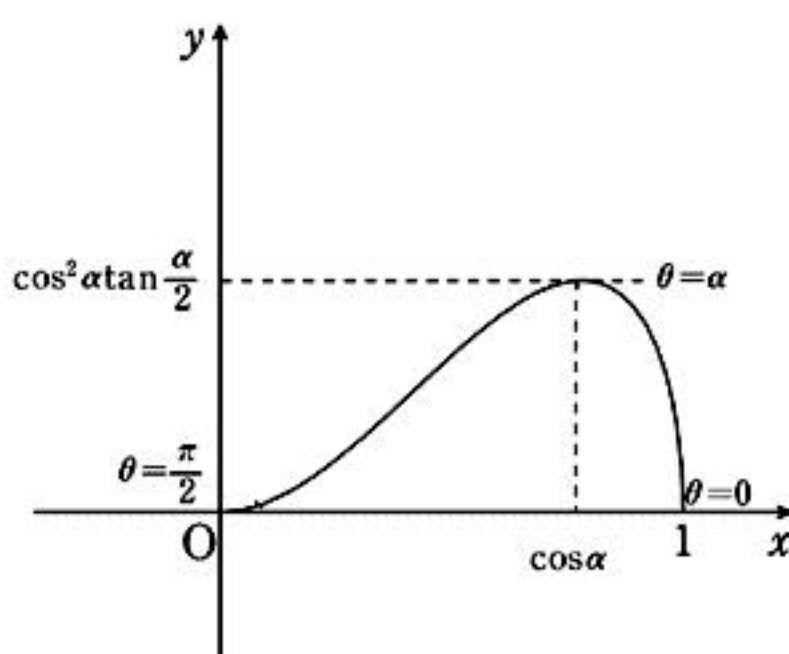
$\cos\alpha = q$ をみたす α が存在して左表のように変化する.
 $\theta = \alpha$ のとき y は最大となる.
 よって $\cos\alpha = q = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

(2) 以上により

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	-	-	-1
$\frac{dy}{d\theta}$	$\frac{1}{2}$	+	0	-	0
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\swarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	

のように進行するから

概形は下図のようになる.



求める面積を S として,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta \tan\frac{\theta}{2} (-\sin\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \tan\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\frac{\theta}{2} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta) \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \cos^3\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta) (\sin\theta)' d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\pi - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

<注> この値 $\approx 0.78 - 0.67 = 0.11$

概形が 1×1 の正方形の中にあり, しかも $\cos^2\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$ が 1 よりかなり小さいことを考えると妥当な値とわかる.

- (1)
- $\{a_n\}, \{b_n\}$
- の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$b_n = br^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である.

仮定により, 各 b_n に対して自然数 $m(n)$ が存在し,

$$b_n = a_{m(n)} = a + (m(n)-1)d$$

となるが, このとき

$$c_n = \frac{a_{m(n)} - a}{d} = m(n) - 1$$

となり, これは 0 以上の整数である. ■

$$\begin{aligned} (2) \quad c_{n+1} - rc_n &= \frac{b_{n+1} - a}{d} - r \frac{b_n - a}{d} \\ &= \frac{b_{n+1} - rb_n - a(1-r)}{d} \\ &= -\frac{a(1-r)}{d} \end{aligned}$$

($\because \{b_n\}$ は漸化式 $b_{n+1} = rb_n$ をみたす)

これは n によらないから

$$c_{n+1} - rc_n = c_2 - rc_1 \quad \blacksquare$$

- (3) $\{b_n\}$ の公比 $r \neq 0, 1$ だから項がすべて等しいことはなく,
 $b_n \neq b$ なる $n (\geq 2)$ をとることができる.

このとき, $c_n \neq c$ も成り立ち, (2) の式から

$$r = \frac{c_{n+1} - c_2}{c_n - c_1} \text{ であり, 整数の商であるからこれは有理数である.}$$

- (4) (2) の経過から $c_{n+1} - rc_n = c_n - rc_{n-1}$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} - c_n = r(c_n - c_{n-1})$$

$\{c_n - c_{n-1}\}$ は等比数列であるから

$$c_{n+1} - c_n = r^{n-1}(c_2 - c_1)$$

よって $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) \\ &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} (c_2 - c_1) \\ &= c_1 + \frac{1-r^{n-1}}{1-r} (c_2 - c_1) \\ &= \frac{1-r^{n-1}}{1-r} c_2 - \frac{r(1-r^{n-2})}{1-r} c_1 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (5) (4) の経過から

$$c_{n+1} - c_n = r^{n-1}(c_2 - c_1)$$

ここで, $r = \frac{q}{p}$ (p は 2 以上の自然数, q は整数, p, q は互いに素) と
 仮定すると,

$$c_{n+1} - c_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} (c_2 - c_1),$$

したがって

$$p^{n-1}(c_{n+1} - c_n) = q^{n-1}(c_2 - c_1)$$

この両辺は整数で, p, q は互いに素としたから p の素因数は $c_2 - c_1$
 を少なくとも $n-1$ 回割らなければならないが, $c_2 - c_1$ のもつ素因数
 は有限個で n は任意だから, これは不合理. よって $p=1$ でなければ
 ならず r は整数である.