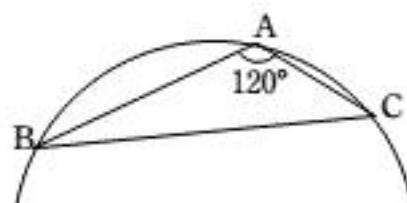


$$(1) \quad \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) \\ = 120^\circ$$

であるから、円周上の定理の逆により

A は BC を弦とする円の劣弧（短いほうの弧）を動く。

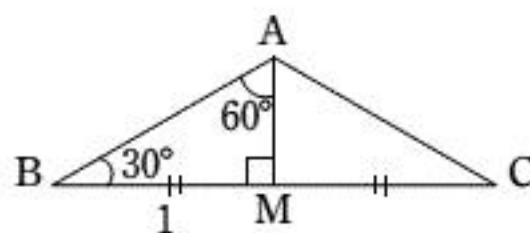


A と直線 BC の距離が最大となるときを考えると、A が BC に垂直な半径と円との交点となるときで、BC の中点を M として

$$AM = BM \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

面積 S の最大値は

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

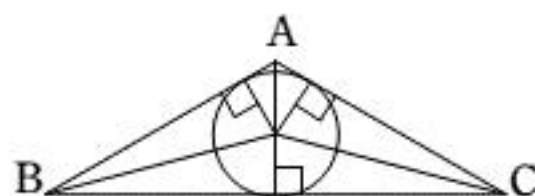


$$\text{また, このとき } AB = AC = \frac{BM}{\cos 30^\circ} \\ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) 内接円の半径を r とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = S = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA) \\ = \frac{1}{2} r \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ = r \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}}$$

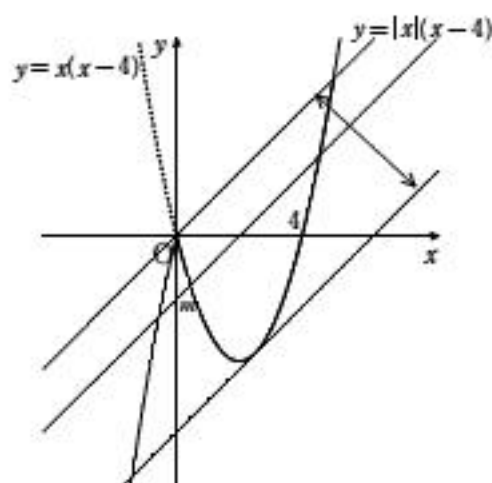
$$\text{よって } r = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - 3} \\ = \underline{2 - \sqrt{3}}$$



「 $y = |x|(x-4) - x - m$ と x 軸が相異なる 3 点で交わる」

$\iff$ 「 $y = |x|(x-4)$ と $y = x + m$ が相異なる 3 点で交わる」

$y = |x|(x-4)$ のグラフは下のである。



したがって m が 0 と

$y = x(x-4)$ のグラフに接するときの間に
あるときに条件を満たす。

$$\begin{aligned}(x(x-4))' &= (x^2 - 4x)' \\ &= 2x - 4 = 1\end{aligned}$$

を解いて $x = \frac{5}{2}$,

$$\text{このとき } y = \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 4 \right) = -\frac{15}{4}$$

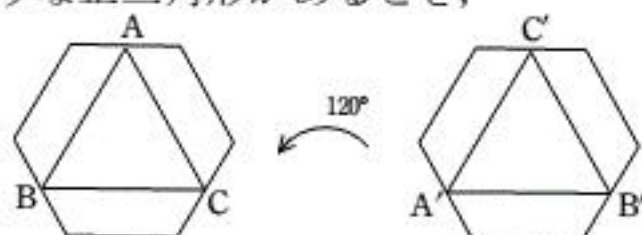
$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{15}{4} \right)$ が $y = x + m$ の点であるとき

$$-\frac{15}{4} = \frac{5}{2} + m \text{ から}$$

$$m = -\frac{15}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{25}{4}$$

したがって求める範囲は $-\frac{25}{4} < m < 0$

(1) このような正三角形があるとき、

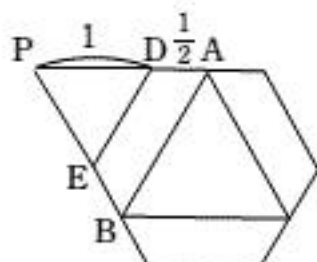
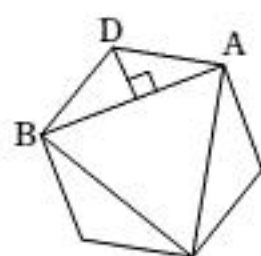


正六角形を 120° 回転することによって、正三角形も条件をみたしつつ 120° 回転する。このとき、中心が重なっていない可能性もあるが、もとの正三角形が平行移動したものとなる。 $(AB \parallel A'B')$ などから、結局、新しい正三角形はもとの正三角形と重なるほかない。

よって、3つの頂点 A, B, C は正六角形の1つおきの辺上にあつて、これら3つの辺を同じ比に分ける。

また、中心は正六角形の中心 O と一致している。

O と正六角形の辺の点との距離は、点が頂点のときに最大、点が辺の中点のときに最小となり、このとき AB は最大、最小となる。



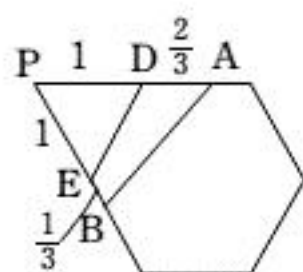
$$\text{最大のとき} \quad AB = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{最小のとき} \quad AB = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{最大値 } \sqrt{3}$$

$$\text{最小値 } \frac{3}{2}$$

(2)



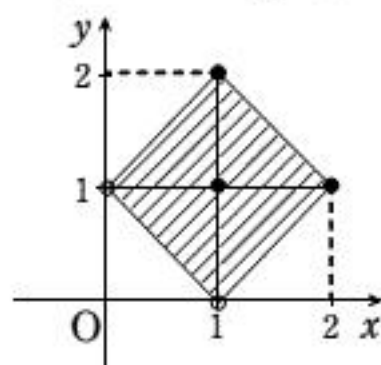
図のように点 P をとる。 $\triangle APB$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5^2 + 4^2 - 5 \cdot 4}{3^2} \\ &= \frac{21}{3^2} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(1) x, y がさいころの目である条件を外して,

$$|x-1|+|y-1|\leq 1 \text{ を満たす.}$$

実数とみて xy 平面に図示すると

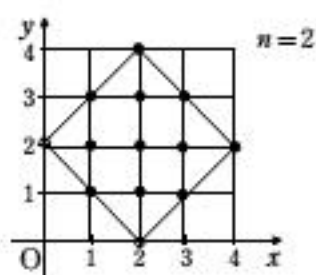


左図のようで、この上の格子点を
さいころの目に対応するものは
 $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3つ
である.

$$\text{よって, } P_1 = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

(2) 同様に

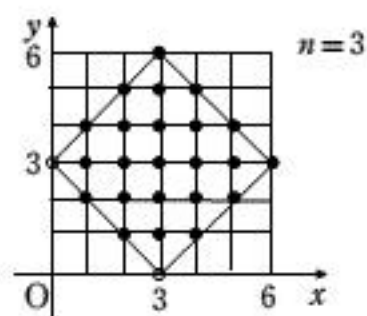
$$|x-n|+|y-n|\leq n \quad (n=2, 3) \text{ を図示する.}$$



$$1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6$$

を満たす格子点を数えることで,

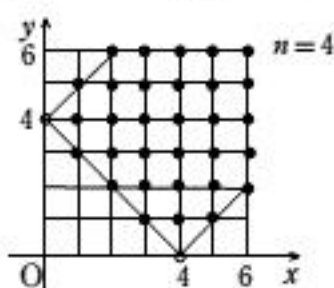
$$P_2 = \frac{11}{6^2} = \frac{11}{36},$$



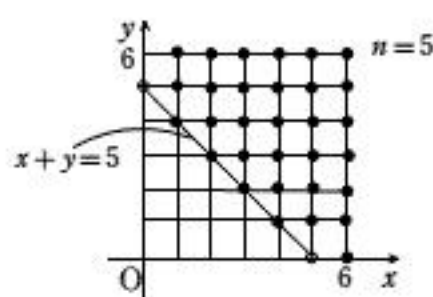
$$P_3 = \frac{23}{6^2} = \frac{23}{36}$$

$n=4, 5, 6$ については

領域が $x > 6, y > 6$ にはみだすことに注意して



$$P_4 = \frac{31}{6^2} = \frac{11}{36},$$



$$P_5 = \frac{30}{6^2} = \frac{5}{6}$$

$n \geq 6$ ではこれより下側の境界線

$x+y=n$ が右上に進むことに注意すると

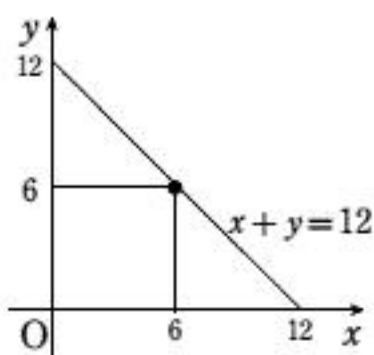
$n=4$ で P_n は最大となり

$$P_4 = \frac{31}{36}$$

(3) 条件をみたす格子点がただ1点となるときで、境界線

$x+y=n$ に注目すると,

$n=12$ のときである.



- (1) x は有理数であるから, $x = \frac{m}{n}$ とおく. ただし, m, n は整数で互いに素であるものとする. また $7x^2 = k$ (整数) とおく.

$$7\left(\frac{m}{n}\right)^2 = k \text{ から } 7m^2 = kn^2$$

よって 7 は k または n^2 をわる.

- 7 が k をわるとき

$k = 7l$ (l は整数) と表せて

$$m^2 = ln^2$$

n のもつ素因数は m^2 , したがって m をわることになるが, 互いに素の仮定からこのような素因数は存在せず, $n = \pm 1$ に限られる. すなわち, x は整数である.

- 7 が n^2 をわるとき

7 は素数であるから n をわる.

$n = 7l$ (l は整数) と表せて,

$$7m^2 = 7^2lk, \text{ すなわち, } m^2 = 7lk$$

7 は m^2 をわる. したがって m をわるが, これは互いに素の仮定に反する. したがってこの場合はない.

以上から $7x^2$ が整数のとき x は整数である.

- (2) 整数 a, b に対して $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数となるとき, とくにこれは偶数であるから, a, b の偶奇で分類するとき, a, b の偶奇が一致する場合に限られる.

a, b がともに奇数であると仮定し,

$a = 2k - 1, b = 2l - 1$ (k, l は整数) と表すと,

$$\begin{aligned} a^2 - 7b^2 &= (2k - 1)^2 - 7(2l - 1)^2 \\ &= (4k^2 + 4k + 1) - 7(4l^2 - 4l + 1) \\ &= 4(k^2 - k - 7l^2 + 7l - 1) - 2 \end{aligned}$$

となって, 4 の倍数とならない.

したがって, この仮定は誤りで, a, b はともに偶数である.

- (3) $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数であるとき, これを m とおくと

$$r^2 - 7(2s)^2 = 4m \dots\dots (*)$$

$7(2s)^2 = r^2 - 4m$ は整数であるから, (1) を用いて $2s$ は整数である.

$r, 2s$ が整数であるから (*) に (2) を用いて $r, 2s$ はともに偶数.

よって, とくに s は整数である.

(1) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して

$$\begin{aligned}
 (xf(x))' &= (ax^3 + bx^2 + cx)' \\
 &= 3ax^2 + 2bx + c \\
 &= ax^2 + bx + c + 2ax^2 + bx \\
 &= ax^2 + bx + c + x(2ax + b) \\
 &= f(x) + xf'(x)
 \end{aligned}$$

が成り立つ.

<注> 数学Ⅲ指定者は積の微分法

等式の両辺を x で微分すると

$$f(x) + xf'(x) = 2x^2 + (2x+1) \int_0^1 f(t)dt + f(x)$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = 2x^2 + (2x+1) \int_0^1 f(t)dt \dots \textcircled{1}$$

等式は $x=0$ で成立するから, ①を考えればよい.

$$\textcircled{1} \text{で } x=0 \text{ として, } \int_0^1 f(t)dt = 0$$

したがって

$$xf'(x) = 2x^2$$

多項式として一致するから

$$f'(x) = 2x \quad \text{よって}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = x^2 + c \text{ と表せて}$$

$$0 = \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + ct \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + c \quad \text{よって } c = -\frac{1}{3} \text{ と定まり}$$

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3} \text{ である.}$$

(2) $g(x) = xf(x)$

$$= x^3 - \frac{1}{3}x \text{ について}$$

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{3}$$

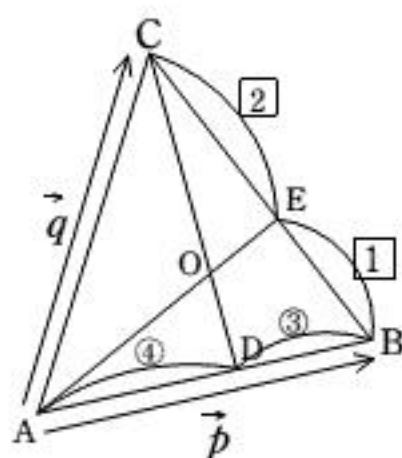
$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$x \geq 0$ における増減は

x	0		$\frac{1}{3}$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって $x = \frac{1}{3}$ において最小となり,

$$\begin{aligned}
 \text{求める最小値は } g\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1-1}{27} \\
 &= -\frac{2}{27}
 \end{aligned}$$



$$(1) \text{ まず, } \overrightarrow{AD} = \frac{4}{7} \overrightarrow{p}, \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{p} + \frac{1}{3} \overrightarrow{q}$$

O が AE 上であるから, 実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AO} = k \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{2}{3} k \overrightarrow{p} + \frac{1}{3} k \overrightarrow{q} \text{ と表せる.}$$

また, O が CD 上であるから, 実数 s を開いて

$$\overrightarrow{AO} = (1-s) \overrightarrow{AD} + s \overrightarrow{AE}$$

$$= (1-s) \frac{4}{7} \overrightarrow{p} + s \overrightarrow{q} \text{ と表せる.}$$

これらが一致し, $\triangle ABC$ の存在から, $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は 1 次独立であるから係数を比較できて,

$$\begin{cases} \frac{4}{7}(1-s) = \frac{2}{3}k \\ s = \frac{1}{3}k \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ s = \frac{2}{9} \end{cases}$$

したがって

$$\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9} \overrightarrow{p} + \frac{2}{9} \overrightarrow{q}$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}| \text{ が成り立つ.}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AO}|^2 &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 |4\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 (16|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 + 16\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BO}|^2 &= |\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \left| -\frac{5}{9} \overrightarrow{p} + \frac{2}{9} \overrightarrow{q} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 (25|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 - 20\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CO}|^2 &= |\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \left| \frac{4}{9} \overrightarrow{p} - \frac{7}{9} \overrightarrow{q} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 (16|\overrightarrow{p}|^2 + 49|\overrightarrow{q}|^2 - 56\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) \end{aligned}$$

これらが一致するから

$$\begin{aligned} 16|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 + 16\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ = 16|\overrightarrow{p}|^2 + 49|\overrightarrow{q}|^2 - 56\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ = 25|\overrightarrow{p}|^2 + 4|\overrightarrow{q}|^2 - 20\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{cases} 45|\overrightarrow{q}|^2 = 72\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ 9|\overrightarrow{p}|^2 = 36\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} |\overrightarrow{p}|^2 = 4\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ 5|\overrightarrow{q}|^2 = 8\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \end{cases} \quad \text{で}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}|^2 \\ &= |\overrightarrow{p}|^2 + |\overrightarrow{q}|^2 - 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= 4\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + \frac{8}{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} - 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= \frac{18}{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \end{aligned}$$

$$AB^2 : BC^2 : CA^2$$

$$\begin{aligned} &= |\overrightarrow{AB}|^2 : |\overrightarrow{BC}|^2 : |\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{p}|^2 : |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}|^2 : |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 4\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} : \frac{18}{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} : \frac{8}{5}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \\ &= 20 : 18 : 8 \\ &= 10 : 9 : 4 \end{aligned}$$

(1) $X \leq k$ となるとき

- ・ 3 つとも k 以下である.
- ・ 2 つが k 以下であり, 他の 1 つが $k+1$ 以上である.

したがって

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \left(\frac{k}{n}\right)^3 + {}_3C_1 \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{k^2}{n^3} (k + 3(n-k)) \\ &= \frac{k^2}{n^3} (3n - 2k) \end{aligned}$$

(2) (1) は $k=0$ においても正しいことに注意して

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X \leq k \text{ かつ } \overline{X \leq k-1}) \\ &= P(X \leq k \text{ かつ } X > k-1) \\ &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ &= \frac{1}{n^3} (3n(k^2 - (k-1)^2) - 2(k^3 - (k-1)^3)) \\ &= \frac{1}{n^3} (3n(2k-1) - 2(3k^2 - 3k + 1)) \\ &= \frac{1}{n^3} (3n(2k-1) - 6k^2 + 6k - 2) \\ &= \frac{1}{n^3} (-6k^2 + (6+6n)k - 3n - 2) \end{aligned}$$

(3) $P(X=k)$ に対応して

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x^2 + 6(1+n)x - 3n - 2 \quad \text{を考えると} \\ f(n) &= -6\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 3n - 2 \\ &= -6\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{3n^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

と変形できる.

したがって

n が奇数のとき, $k = \frac{n+1}{2}$ で最大

n が偶数のとき, $k = \frac{n}{2}, \frac{n+2}{2}$ で最大となる.

(1) $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ であるから 2 接線が直交する条件は

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = -1$$

$$\text{すなわち} \quad ab = -1$$

(2) $b < 0$ であるから

$$\begin{aligned} A(a, \log a), B(b, \log|b|) \\ &= (b, \log(-b)) \\ &= \left(t \frac{1}{a}, \log\left(\frac{1}{a}\right)\right) \\ &= \left(-t \frac{1}{a}, -\log a\right) \end{aligned}$$

AB の中点 M (X, Y) についての

$$X = \frac{a - \frac{1}{a}}{2}, Y = \frac{\log a - \log a}{2} = 0 \quad \text{で, } a - \frac{1}{a} \text{ は } a > 0 \text{ において}$$

単調増加.

$$a - \frac{1}{a} \xrightarrow{a \rightarrow +0} -\infty$$

$$a - \frac{1}{a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} +\infty$$

であるから X はすべての実数値をとる.

したがって

AB の中点は x 軸上(すべての点) に存在する.

(3) (1, 0) は x 軸上であり, (2) により, これが AB の中点となるから $a > 1$ である.

また, AM を 2 : 1 に外分することにより

$$B(2-a, -\log a) \text{ で}$$

$$\log|2-a| = -\log a$$

$$\iff \log(a-2) + \log a = 0$$

$$\iff \log a(a-2) = 0$$

$$\iff a(a-2) = 1$$

$$\iff a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$\iff a = 1 \pm \sqrt{2}$$

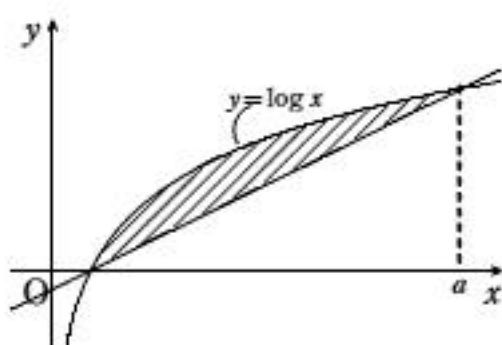
$$a > 1 \text{ だから } a = 1 + \sqrt{2}$$

(1, 0), (a, log a) を結ぶ直線の方程式は

$$y = \frac{\log a}{a-1}(x-1) \quad \text{であり,}$$

求める面積は S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a \left(\log x - \frac{\log a}{a-1}(x-1) \right) dx \\ &= \left[x(\log x - 1) - \frac{\log a}{2(a-1)}(x-1)^2 \right]_1^a \\ &= a(\log a - 1) - \frac{\log a}{2}(a-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(a+1)\log a + 1 - a \\ &= \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2}) + 1 - (1+\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \quad \text{であり}$$

これは原点中心 $\frac{\pi}{6}$ 回転の 1 次変換を表す.

また B は x 軸に関する対称移動の 1 次変換を表す.

このことから, $m=12, n=2$

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{とするとき}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{k\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \quad \text{となる.}$$

$\overrightarrow{OQ}$ から $\overrightarrow{OR}$ に回る角は $2\theta + \frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{OR}$ から $\overrightarrow{OS}$ に回る角は $\frac{k-2}{6}\pi$ でこれらが,

$\frac{2}{3}\pi$ の整数倍となるときを考えて, $\frac{k-2}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi l$ (l は整数)

$1 \leq k < m, k \neq 2$ を考えて

$$k = 6, 10$$

$$2\theta = \frac{2l-1}{3}\pi \quad (l \text{ は整数}) \quad \text{となり, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ で考えていくと,}$$

$$(\theta, k) = \left(\frac{\pi}{6}, 6\right), \left(\frac{3\pi}{6}, 10\right), \left(\frac{7}{6}\pi, 6\right), \left(\frac{9\pi}{6}, 10\right)$$

となる.

$$\begin{aligned} \text{したがって, } & \left(k=6, P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right), \\ & (k=10, P(0, p)), \\ & \left(k=6, P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right), \\ & (k=6, P(0, -1)) \end{aligned}$$

(1) $0 < a < b, a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ である.

$$\text{また } x + y = a + b$$

$$\iff x - a = b - y$$

このとき

$$\begin{aligned} xy - ab &= xy - ay + ay - ab \\ &= (x - a)y - a(b - y) \\ &= (b - y)y - a(b - y) \\ &= (b - y)(y - a) \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $xy \geq ab$

(2) まず, $yz \geq ab$ を示しておく.

$$\begin{aligned} x + y + z &= a + 2b \\ &= (a + b) + b \end{aligned}$$

$$\iff y + z = (a + b) + (b - x) \geq a + b$$

$$\iff y - a \geq b - z$$

このとき

$$\begin{aligned} yz - ab &= yz - az + az - ab \\ &= (y - a)z - a(b - z) \\ &\geq (b - z)z - a(b - z) \\ &= (b - z)(z - a) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $yz \geq ab$ は成り立つ.

このとき,

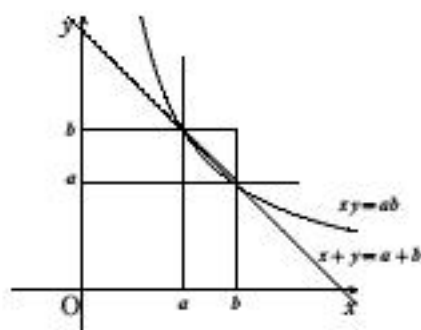
$$\begin{aligned} xyz - ab^2 &= xyz - ayz + ayz - ab^2 \\ &= (x - a)yz - a(b^2 - yz) \\ &= ((b - y) + (b - z))yz - a(b^2 - by + by - yz) \\ &= (b - y)yz + (b - z)yz - ab(b - y) - ay(b - z) \\ &= (b - z)(z - a)y + (b - y)(yz - ab) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $xyz \geq ab^2$ は成り立つ.

<注>

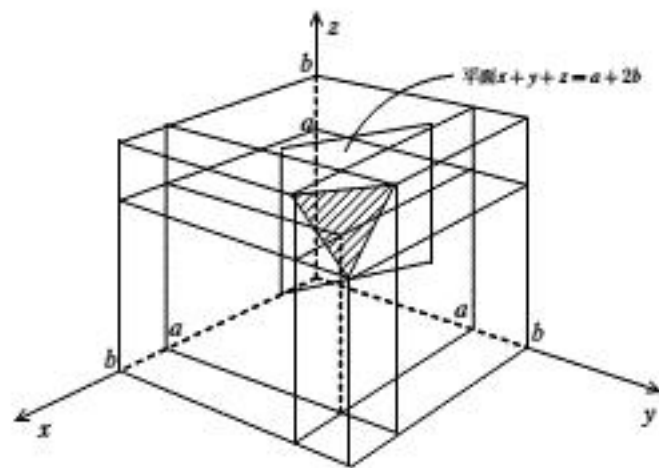
1° 積の微分法の証明に用いると同様の変形

2° (1) は

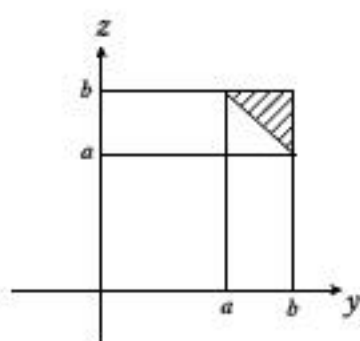


を考えると理解できる.

3° (2) は



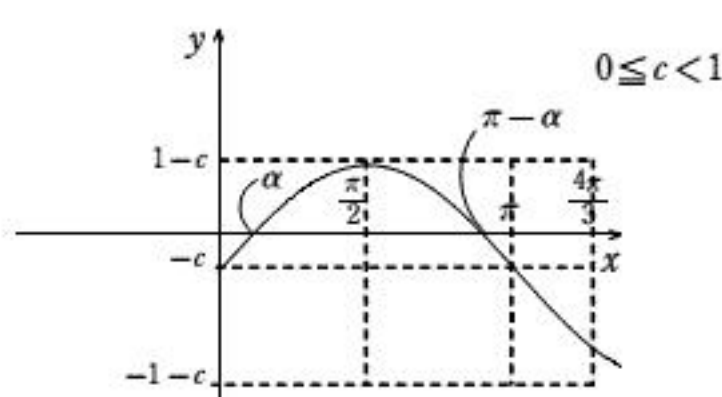
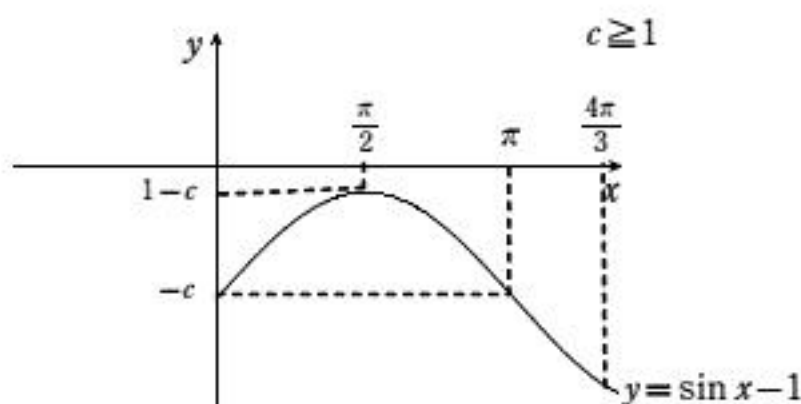
$xyz = ab^2$ の表す曲面を考えることは難しいが,
 yz 平面への正射影を考えると



となって,

(1) を少し拡張して用いればよいことが
見える.

(1)



$$0 \leq y \leq |\sin x - c|$$

の代わりに x 軸と $y = \sin x - c$ の間の部分を考えることにしてよい。

また、 $c \geq 1$ では面積が単調に増加することが明らか。

よって $0 \leq c \leq 1$ で考える。

このとき、 $\sin \alpha = c$ 、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす α がただ 1 つ存在し、

$$\sin(\pi - \alpha) = c$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4\pi}{3}} |\sin x - c| dx \\ &= \int_0^{\alpha} -(\sin x - c) dx + \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} (\sin x - c) dx + \int_{\pi - \alpha}^{\frac{4\pi}{3}} -(\sin x - c) dx \\ &= [\cos x + cx]_0^{\alpha} - [\cos x + cx]_{\alpha}^{\pi - \alpha} + [\cos x + cx]_{\pi - \alpha}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi - 2\cos(\pi - \alpha) + 2\cos \alpha - \cos 0 \\ &\quad + \left(\frac{4}{3}\pi - 2(\pi - \alpha) + 2\alpha - 0 \right) c \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 2\cos \alpha + 2\cos \alpha - 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{4}{3}\pi - 2\pi + 4\alpha \right) c \\ &= \left(4\cos \alpha - \frac{3}{2} \right) + \left(4\alpha - \frac{2}{3}\pi \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -4\sin \alpha + 4\sin \alpha + \left(4\alpha - \frac{2}{3}\pi \right) \cos \alpha \\ &= 4 \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \cos \alpha \end{aligned}$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos \alpha > 0$ で

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

表の全体から S は $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき最小となる。

このとき $c = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で

$$\begin{aligned} S &= \left(4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \right) + \left(4 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad V &= \pi \int_0^{\frac{4\pi}{3}} |\sin x - c|^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{4\pi}{3}} (\sin^2 x - 2c \sin x + c^2) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2c \sin x + c^2 \right) dx \\ &= \pi \left[\left(c^2 + \frac{1}{2} \right) x + 2c \cos x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \pi \left[\left(c^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{4\pi}{3} + 2c \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \pi \left(\frac{4\pi}{3} c^2 - 3c + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{4\pi}{3} \left(c - \frac{9}{8\pi} \right)^2 - \frac{27}{16\pi} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \end{aligned}$$

$c \geq 0$ であるから

$c = \frac{9}{8\pi}$ のとき

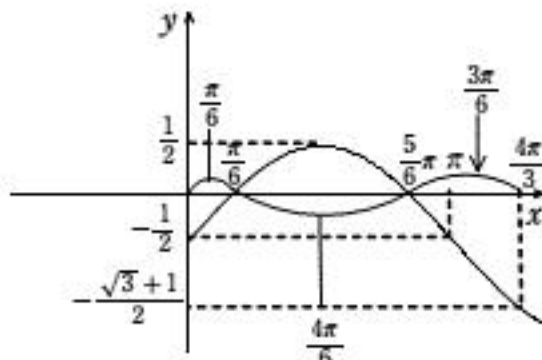
V は最小値

$$V = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{27}{16}$$

をとる。

<注>

(1)



$$\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$c = \frac{1}{2}$ のとき、

$y = \sin x - \frac{1}{2}$ が x 軸より上側にある x 座標の幅と下側にある x 座標の幅は等しい。