

1

(1)

点 $P(t, t^2)$ と直線 $y = x$ の距離は、

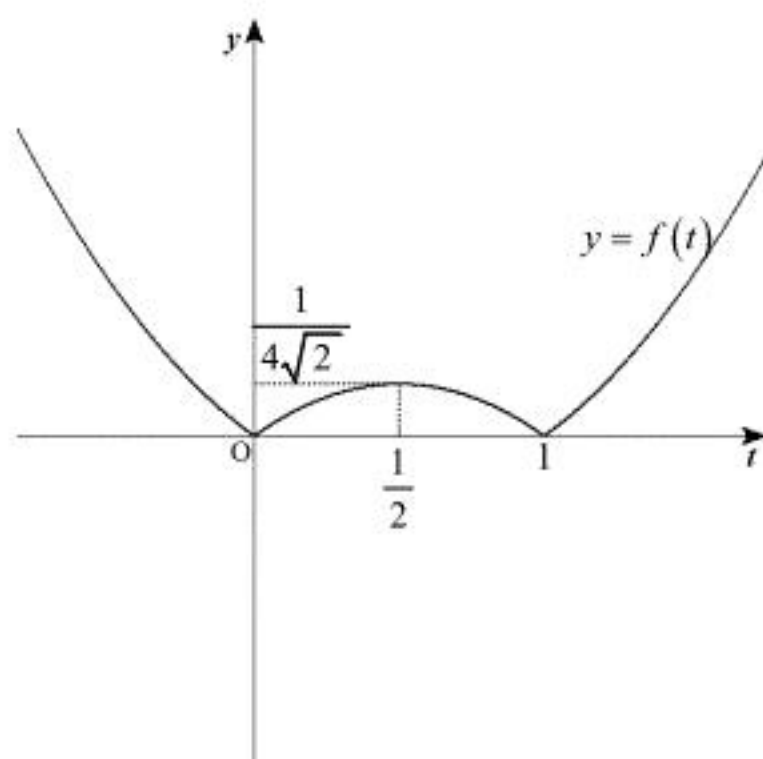
$$\frac{|t - t^2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|t^2 - t|}{\sqrt{2}}$$

である。これが 2 点 PQ 間の距離である。

(答) $\frac{|t^2 - t|}{\sqrt{2}}$

(2)

$y = f(t)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)のグラフより、 $y = f(t)$ と $y = \sqrt{2}$ の交点は、 $y = \frac{t^2 - t}{\sqrt{2}}$ と $y = \sqrt{2}$ の交点と一致する。よって

$$\frac{t^2 - t}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t = 2$$

$$\Leftrightarrow t = -1, 2$$

となる。

(答) $t = -1, 2$

2

(1)

点 H は線分 BC の中点なので,

$$\frac{AH}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{BH} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$B = \frac{180^\circ - A}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

なので

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{\tan 75^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} \tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \cos B &= \sin 15^\circ \cos 75^\circ \\ &= \sin 15^\circ \cos(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \sin 15^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 c+3d &= (4a+7b)+3(3a+4b) \\
 &= 13a+19b \\
 &= 5(3a+4b)-(2a+b)
 \end{aligned}$$

より,

$$2a+b=5(3a+4b)-(c+3d)$$

である。 $5(3a+4b)$ は5の倍数なので、 $c+3d$ が5の倍数であるならば、 $2a+b$ も5の倍数となる。

(証明終)

(2)

与えられた条件式より,

$$7d-4c=5a$$

である。 c と d が p の倍数ならば、 $7d-4c$ も p の倍数である。したがって、 $5a$ も p の倍数であるから、5は p の倍数、または a は p の倍数となる。つまり、

$$p=5 \text{ または } a \text{ は } p \text{ の倍数} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、与えられた条件式より、

$$3c-4d=5b$$

である。上の議論と同様にして、

$$p=5 \text{ または } b \text{ は } p \text{ の倍数} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで、仮に $p \neq 5$ だとすると①、②より a, b がともに p の倍数となり、 a と b が互いに素であることに反する。よって、 $p=5$ である。

(証明終)

(1)

カードの取り出し方は全部で

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

である。取り出した4枚の積が5の倍数になるためには、まず5を選び、残り3枚を $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ から選べばよい。このような組み合わせは

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$

となるので、確率は

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

となる。

(答) $\frac{4}{9}$

(2)

取り出した4枚の積が5の倍数で、かつ10の倍数にならないためには、まず5を選び、残り3枚を $\{1, 3, 7, 9\}$ から選べばよい。このような組み合わせは

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

となる。前の小問より、10の倍数になるものは

$$56 - 4 = 52 \text{ (通り)}$$

なので、確率は

$$\frac{52}{126} = \frac{26}{63}$$

となる。

(答) $\frac{26}{63}$

(3)

取り出した4枚の積が2の倍数にならないためには、 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ から4枚選べばよい。このような組み合わせは

$${}_5C_4 = 5 \text{ (通り)}$$

である。また、取り出した4枚の積が3の倍数にならないためには、 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ から4枚選べばよい。このような組み合わせは

$${}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

である。また、2の倍数にも3の倍数にもならないためには、 $\{1, 5, 7\}$ から4枚選ぶ必要があるが、このような組み合わせは存在しない。

以上より、2の倍数でないか、または3の倍数でないものは

$$5 + 15 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。したがって2の倍数であり、かつ3の倍数であるものは

$$126 - 20 = 106 \text{ (通り)}$$

となる。よって確率は

$$\frac{106}{126} = \frac{53}{63}$$

となる。

(答) $\frac{53}{63}$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t-2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t < 1)$$

とおけるので点 P の座標は $(3t, 2-2t)$ 、垂線の足 H の座標は $(3t, 0)$ 、中点 M の座標は $\left(\frac{3t+3}{2}, 0\right)$ となる。

$\triangle OPM$ を回転してできる円の半径を r とすると、 r は辺 OP と辺 OM の大きい方である。

$$OP^2 = (3t)^2 + (2-2t)^2 = 13t^2 - 8t + 4$$

$$OM^2 = \left(\frac{3t+3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}t^2 + \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}$$

より、

$$OP^2 - OM^2 = \frac{43}{4}t^2 - \frac{25}{2}t + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(t-1)(43t-7)$$

となるので、

$$r^2 = \begin{cases} OP^2 = 13\left(t - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{36}{13} & (0 \leq t \leq \frac{7}{43} \text{ のとき}) \\ OM^2 = \frac{9}{4}t^2 + \frac{9}{2}t + \frac{9}{4} & (\frac{7}{43} \leq t < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。 $\frac{7}{43} < \frac{4}{13}$ より、 $0 \leq t \leq \frac{7}{43}$ のとき r^2 は t に関して単調減少する。また、 $\frac{7}{43} \leq t < 1$

のとき r^2 は t に関して単調増加する。したがって r は $t = \frac{7}{43}$ のときに最小となる。

このとき、点 P の座標は

$$\left(\frac{21}{43}, \frac{72}{43}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{21}{43}, \frac{72}{43}\right)$$

6

(1)

まず、左側の不等式

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_nC_k$$

を証明する。

$l=0, 1, 2, \dots, k-1$ のとき

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-l}{k-l}$$

である。なぜなら

$$\frac{n-l}{k-l} - \frac{n}{k} = \frac{(n-l)k - n(k-l)}{k(k-l)} = \frac{nl - kl}{k(k-l)} = \frac{(n-k)l}{k(k-l)} \geq 0$$

だからである。よって、

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} \\ &= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-k+1}{1} \\ &\geq \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \end{aligned}$$

を得る。

次に、右側の不等式

$${}_nC_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

を証明する。

分子は大きく、分母は小さくした方が、分数全体は大きくなる。よって

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1} \\ &\leq \frac{n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n^k}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(2)

前の小問の不等式と、2項定理より

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \sum_{k=1}^n {}_nC_k < \sum_{k=0}^n {}_nC_k = (1+1)^n = 2^n$$

となる。これを 2^n で割って、

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

を得る。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{2^{k-1}} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\because (1) \text{の右側の不等式を用いた}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &< 3 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

平行移動をしても x^2 の係数は不変なので

$$C_1: y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$$

とおける。これが直線 $y = kx$ と $x = 0$ で接することから、方程式

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c - kx = 0$$

は $x = 0$ を重解に持つ。つまり

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c - kx = a'(x-0)^2$$

とおける。両辺の係数を比較して、 $b = k$ 、 $c = 0$ となる。よって

$$C_1: y = \frac{a}{2}x^2 + kx$$

となる。同様にして

$$C_2: y = -\frac{2}{a}x^2 + kx$$

となる。 $y = kx$ の傾きは k であるから、これと直交する直線の傾きは $-\frac{1}{k}$ なので

$$l: y = -\frac{1}{k}x$$

となる。 C_1 と l の交点の x 座標は

$$\frac{a}{2}x^2 + kx - \left(-\frac{1}{k}x\right) = x\left(\frac{a}{2}x + k + \frac{1}{k}\right) = 0$$

を解いて

$$x = 0, -\frac{2}{a}\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

となる。ここで、面積に関する公式より

$$S_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{a} \left(k + \frac{1}{k} \right) \right\}^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{a^2} \left(k + \frac{1}{k} \right)^3$$

となる。 C_2 と l の交点の x 座標は

$$-\frac{2}{a}x^2 + kx - \left(-\frac{1}{k}x\right) = x\left(-\frac{2}{a}x + k + \frac{1}{k}\right) = 0$$

を解いて

$$x = 0, \frac{a}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

となる。よって、面積に関する公式より

$$S_2 = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{a}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \right\}^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{4} \left(k + \frac{1}{k} \right)^3$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{a^2} \left(k + \frac{1}{k} \right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{4} \left(k + \frac{1}{k} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \right) \left(k + \frac{1}{k} \right)^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \right) \left(k + \frac{1}{k} \right)^3$$

(2)

$k = \sqrt{2} - 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$k + \frac{1}{k} = 2\sqrt{2}$$

である。これを(2)の答えに代入し、相加相乗平均の不等式を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \right) (2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \right) 16\sqrt{2} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{a^2}{4} \right) \\ &\geq \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{4}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot 2 \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。等号成立条件は、

$$\begin{aligned} \frac{4}{a^2} &= \frac{a^2}{4} \\ \Leftrightarrow (a^2)^2 &= 4^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 4 \quad (\because a^2 > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \pm 2 \end{aligned}$$

となり、 a は正なので

$$a = 2$$

となる。等号を成立させる a が存在したので、 S の最小値は、さきほどの

$$\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2 \text{ のとき, } \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

(1)

カードの取り出し方は全部で

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

である。取り出した 4 枚の積が 5 の倍数になるためには、まず 5 を選び、残り 3 枚を $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ から選べばよい。このような組み合わせは

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$

となるので、確率は

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

となる。

(答) $\frac{4}{9}$

(2)

まず、4 の倍数にならないような取り出し方の個数を求める。

4 と 8 以外、すなわち $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ から 4 枚選ぶ方法は

$${}_7C_4 = 35 \text{ (通り)}$$

となる。2 と 6 を選び、さらに $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ から 2 枚選ぶ方法は

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

となる。よって、4 の倍数にならないのは

$$35 - 10 = 25 \text{ (通り)}$$

となる。

次に、3 の倍数にならないためには、 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ から 4 枚選べばよい。このような組み合わせは

$${}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

となる。

次に、4 の倍数にも 3 の倍数にもならないためには、 $\{1, 2, 5, 7\}$ から 4 枚選べばよい。このような組み合わせは 1 通りである。

以上より、4 の倍数でないか、または 3 の倍数でないものは

$$25 + 15 - 1 = 39 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、4 の倍数であり、かつ 3 の倍数であるものは

$$126 - 39 = 87 \text{ (通り)}$$

となる。よって確率は

$$\frac{87}{126} = \frac{29}{42}$$

となる。

(答) $\frac{29}{42}$

(3)

平方数には各素因数が偶数個含まれる。素数 5 を含む数は 5 しかないので、5 を選ぶと平方数にならない。同様に、素数 7 を含む数は 7 しかないので、7 を選ぶと平方数にならない。したがって、4 つの数は $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ から選ぶことになる。

各数を素因数分解すると、 $\{1, 2, 3, 2^2, 2 \cdot 3, 2^3, 3^2\}$ となるので、 X が平方数のとき、 X を素

因数分解したときに現れる素数 3 の個数は 0 個か 2 個か 4 個のいずれかである。

[1] X が 3 の倍数でないとき

4 数の組み合わせは $(1, 2, 4, 8)$ の 1 通りのみである。

[2] X が 3^2 の倍数だが 3^4 の倍数でないとき

3 と 6 を選ぶと、残りの 2 数は $\{1, 2, 4, 8\}$ から選ぶことになる。平方数になるのは

$$(1, 2), (1, 8), (2, 4), (4, 8)$$

のときである。

9 を選ぶと、残りの 3 数は $\{1, 2, 4, 8\}$ から選ぶことになる。平方数になるのは

$$(1, 2, 8), (2, 4, 8)$$

のときである。

以上より、6 通りとなる。

[3] X が 3^4 の倍数のとき

3, 6, 9 を選び、残りの 1 つを $\{1, 2, 4, 8\}$ から選ぶことになる。平方数になるのは 2 または 8 の 2 通りである。

以上[1], [2], [3]より、 X が平方数となるような組み合わせは

$$1 + 6 + 2 = 9 \text{ (通り)}$$

となる。よって求める確率は

$$\frac{9}{126} = \frac{1}{14}$$

となる。

(答) $\frac{1}{14}$

(1)

 $x > 0$ なので、

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq e^{-ax+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}(1 - xe^{-ax+b}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - xe^{-ax+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xe^{-ax+b} \leq 1$$

となる。ここで

$$h(x) = xe^{-ax+b}$$

とおくと、満たすべき条件は

$$h(x) \leq 1 \quad (x > 0)$$

となる。

[1] $a \leq 0$ のとき $x > 0$ のとき $-ax + b \geq b$ なので、

$$e^{-ax+b} \geq e^b$$

が成り立つ。よって

$$h(x) \geq xe^b$$

となるが、これは $x > e^{-b}$ のとき $h(x) > 1$ となってしまう、不適である。[2] $a > 0$ のとき

積の微分の公式より

$$h'(x) = e^{-ax+b} + x(-a)e^{-ax+b} = (-ax+1)e^{-ax+b}$$

なので、増減表は次のようになる。

x	(0)	...	$\frac{1}{a}$	...	∞
$h'(x)$		+	0	-	0
$h(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{1}{a}e^{b-1}$	$\searrow$	0

したがって、満たすべき条件は

$$\frac{1}{a}e^{b-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{b-1} \leq a$$

となる。これは $a > 0$ を満たす。

以上[1], [2]より、求める条件は

$$e^{b-1} \leq a$$

である。

(答) $e^{b-1} \leq a$

(2)

 $y = g(x)$ のグラフが $x = t$ で $y = f(x)$ に接するための必要十分条件は

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{t} = e^{-at+b} \\ -\frac{1}{t^2} = -ae^{-at+b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = e^{at-b} \\ -\frac{1}{t^2} = -a\frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = e^{1-b} \\ \frac{1}{t} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - \log t \\ a = \frac{1}{t} \end{cases}$$

となる。これに $t = 1$ を代入して a, b を求めると

$$g_1(x) = e^{-x+1}$$

となる。同様に $t = 2$ を代入して a, b を求めると

$$g_2(x) = e^{-\frac{x}{2}+1-\log 2}$$

となる。これら 2 式を連立すると

$$e^{-x+1} = e^{-\frac{x}{2}+1-\log 2}$$

$$\Leftrightarrow -x+1 = -\frac{x}{2}+1-\log 2$$

$$\Leftrightarrow \log 2 = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \log 2$$

となる。このとき

$$y = g_1(2 \log 2)$$

$$= e^{-2 \log 2 + 1}$$

$$= e^{-\log 4} e^1$$

$$= \frac{e}{4}$$

となるので、 $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点の座標は

$$\left(2 \log 2, \frac{e}{4}\right)$$

となる。

(答) $\left(2 \log 2, \frac{e}{4}\right)$

(3)

 $y = g_1(x), y = g_2(x), y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積は、

$$\int_1^{2 \log 2} \left(\frac{1}{x} - e^{-x+1} \right) dx + \int_{2 \log 2}^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-\frac{x}{2}+1-\log 2} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^{2 \log 2} e^{-x+1} dx - \int_{2 \log 2}^2 \left(e^{-\frac{x}{2}+1-\log 2} \right) dx$$

$$= [\log x]_1^2 - \left[-e^{-x+1} \right]_1^{2 \log 2} - \left[-2e^{-\frac{x}{2}+1-\log 2} \right]_{2 \log 2}^2$$

$$= \log 2 + \left(e^{-2 \log 2 + 1} - e^0 \right) + 2 \left(e^{-1+1-\log 2} - e^{-\log 2 + 1 - \log 2} \right)$$

$$= \log 2 - \frac{e}{4}$$

となる。

(答) $\log 2 - \frac{e}{4}$

(1)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で考える。置換 $x = \tan^3 \theta$ によって

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$
x	1	$\rightarrow$	$3\sqrt{3}$

となり、また、

$$\begin{aligned}
 dx &= (\tan^3 \theta)' d\theta \\
 &= (3 \tan^2 \theta) (\tan \theta)' d\theta \\
 &= (3 \tan^2 \theta) \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= 3 \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

となる。よって与式は

$$\begin{aligned}
 &\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) 3 \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\
 &= 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{ (1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta \} d\theta \\
 &= 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
 &= 3 \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{1}{4} \pi
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4} \pi$

(2)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan^3 \theta$ は単調増加なので、 $t = \tan^3 \theta$ を満たす θ が一意に定まる。これ

を ϕ とおくと、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ である。

$$f(t) = \int_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

とおくと、前の小問と同様にして

$$\begin{aligned}
 f(t) - g(t) &= \int_1^t \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx \\
 &= 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\phi} d\theta \\
 &= 3 \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &\rightarrow 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (t \rightarrow \infty) \\
 &= \frac{3}{4} \pi
 \end{aligned}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_1^t x^{-\frac{2}{3}} dx \\
 &= \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_1^t \\
 &= 3t^{\frac{1}{3}} - 3
 \end{aligned}$$

である。これらより

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ g(t) - 3t^{\frac{1}{3}} \right\} = -3 - \frac{3}{4} \pi$$

を得る。したがって

$$a = 3, b = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $a = 3, b = \frac{1}{3}$

(1)

任意の自然数は、 $6n, 6n \pm 1, 6n \pm 2, 6n + 3$ (n は0以上の整数)の6通りの形で表現できる。

$6n$ で表せる自然数は、2や3で割り切れるので、素数ではない。

$6n \pm 2 = 2(3n \pm 1)$ で表せる自然数が素数になるのは、 $3n \pm 1 = 1$ のときに限るので、5以上にはならない。

$6n + 3 = 3(2n + 1)$ で表せる自然数が素数になるのは、 $2n + 1 = 1$ のときに限るので、5以上にはならない。

以上より、5以上の素数は $6n \pm 1$ の形で表される。

(証明終)

(2)

$6N - 1$ は2でも3でも割り切れないので、素因数分解をしたときに現われる素数は5以上である。よって、(1)より、現れる素数は $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表わされる。ここで、素因数分解の結果が

$$6N - 1 = (6n_1 + 1)(6n_2 + 1) \cdots (6n_k + 1)$$

と表わされたとすると、左辺は6で割った余りが5、右辺は6で割った余りが1であるので、これは矛盾である。したがって、素因数分解の結果に現れる素数の中に、 $6n - 1$ の形で表わされるものがある。

(証明終)

(3)

$6n - 1$ で表せる素数の例として5がある。ここで、 $6n - 1$ の形で表せる素数が有限個であると仮定すると、その中で最大のものが存在するので、それを M とおく。すると、 $M \geq 5$ である。ここで、

$$M! = M \cdot (M - 1) \cdots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

は6の倍数なので、 $M! - 1$ は $6N - 1$ の形で表わされる。ここで、 $M! - 1$ は2から M までのどの整数で割っても $M - 1$ 余るので、 $6n - 1$ の形で表せるどの素数でも割り切れない。しかし、(2)より $M! - 1$ は $6n - 1$ の形で表せる素因数 p を持つので、これは矛盾である。したがって、 $6n - 1$ の形で表せる素数は無限に多く存在する。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x+a^2-2 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow -a^2+2 &\leq x
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 g(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x(x-a)(x-a-2) &\geq 0
 \end{aligned}$$

であるから、命題

$$x \geq -a^2+2 \Rightarrow x(x-a)(x-a-2) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

がすべての実数 x について成り立つような a の条件を求めればよい。[1] $a=0$ のとき

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \text{ は} \\
 x \geq 2 \Rightarrow x^2(x-2) &\geq 0
 \end{aligned}$$

となり、成立する。

[2] $a=-2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \text{ は} \\
 x \geq -2 \Rightarrow x^2(x+2) &\geq 0
 \end{aligned}$$

となり、成立する。

[3] 区間 $x > -a^2+2$ が 0 を含むとき

$$\begin{aligned}
 0 &> -a^2+2 \\
 \Leftrightarrow a^2 &> 2 \\
 \Leftrightarrow a &< -\sqrt{2} \text{ または } \sqrt{2} < a
 \end{aligned}$$

となる。このとき $x(x-a)(x-a-2)$ は $x=0$ の前後で符号変化が起こる。したがって、 $x=0$ の前後のいずれかで負の値を取ってしまい、不適である。

[4] 区間 $x > -a^2+2$ が $a+2$ を含むとき

$$\begin{aligned}
 a+2 &> -a^2+2 \\
 \Leftrightarrow a^2+a &> \\
 \Leftrightarrow a &< -1 \text{ または } 0 < a
 \end{aligned}$$

である。このとき $x(x-a)(x-a-2)$ は $x=a+2$ の前後で符号変化が起こる。したがって、 $x=a+2$ の近くで負の値を取ってしまい、不適である。

[5] 区間 $x > -a^2+2$ が 0 も $a+2$ も含まないとき

$$\begin{aligned}
 [3], [4] \text{ 以外なので,} \\
 -1 \leq a \leq 0
 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$a \leq 0 < a+2 < x$$

が成り立つ。この範囲において $x(x-a)(x-a-2)$ は常に正となるので、 $\textcircled{1}$ を満たす。以上[1]～[5]より、 a の条件は

$$a = -2, -1 \leq a \leq 0$$

となる。

(答) $a = -2, -1 \leq a \leq 0$

(2)

(1)と同様に考えて、

$$x \geq 0 \Rightarrow x \geq -a^2+2 \text{ または } x(x-a)(x-a-2) \geq 0$$

が成り立つ a の条件を求めればよい。 $x=0$ のときは、いかなる a に対しても2番目の条件が成り立つ。 $x>0$ のとき、2番目の条件は

$$\begin{aligned}
 (x-a)(x-a-2) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\leq a \text{ または } a+2 \leq x
 \end{aligned}$$

と同値である。したがって、

$$x > 0 \Rightarrow x \geq -a^2+2 \text{ または } x \leq a \text{ または } a+2 \leq x$$

が成り立つ a の条件を求めればよい。さらに言いかえると、区間 $x > 0$ が区間塊

$$x \geq -a^2+2 \text{ または } x \leq a \text{ または } a+2 \leq x \quad \cdots \textcircled{2}$$

で覆われるような a の条件を求めればよい。[1] $-a^2+2 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned}
 -a^2+2 &\leq a \\
 \Leftrightarrow (a+2)(a-1) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow a &\leq -2 \text{ または } 1 \leq a
 \end{aligned}$$

である。このとき $\textcircled{2}$ は常に実数全体を覆うので、常に成り立つ。[2] $a < -a^2+2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a &< -a^2+2 \\
 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) &< 0 \\
 \Leftrightarrow -2 &< a < 1 \quad \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

である。このとき $0 < a+2$ なので区間 $a+2 \leq x$ は $0 < x$ を覆わない。したがって、区間 $-a^2+2 \leq x$ が $0 < x$ を覆うことが、 $\textcircled{2}$ が $0 < x$ を覆うことの必要十分条件となる。つまり

$$\begin{aligned}
 -a^2+2 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow a &\leq -\sqrt{2} \text{ または } \sqrt{2} \leq a
 \end{aligned}$$

が必要十分条件である。 $\textcircled{3}$ も合わせると、

$$-2 < a \leq -\sqrt{2}$$

となる。

以上[1], [2]より、 a の条件は

$$a \leq -\sqrt{2} \text{ または } 1 \leq a$$

となる。

(答) $a \leq -\sqrt{2} \text{ または } 1 \leq a$