

平成21年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがある。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁である。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机の上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学 I 数学 A	教育学部 算数科選修	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
	教育学部 理科教育分野 技術科教育分野	☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	文学部 行動科学科 法経学部	☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7
	園芸学部 教育学部 情報教育分野	☐ 2 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 7
	教育学部 数学科教育分野	☐ 2 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8
	理学部 生物学科，地球科学科 工学部 建築学科 都市環境システム学科 デザイン学科	☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 9
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B 数学 C	理学部 物理学科，化学科 薬学部 工学部 機械工学科 メディカルシステム工学科 電気電子工学科 ナノサイエンス学科 共生応用化学科 画像科学科 情報画像学科 先進科学プログラム	☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
	医学部	☐ 7 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12
	理学部 数学・情報数理学科	☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 12

1 放物線 $y = x^2$ …… ① と 直線 $y = x$ …… ② について次の問いに答えよ。

- (1) 放物線①上の点 P に対し、直線②上の点であって P に最も近い点を Q とする。 P の x 座標を t とするとき、2 点間の距離 PQ を t を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた t の関数を $f(t)$ とするとき、 $f(t)$ のグラフをかけ。
- (3) (2) の関数 $f(t)$ について $f(t) = \sqrt{2}$ となる t の値を求めよ。

2 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。 $\angle A$, $\angle B$ の大きさをそれぞれ A , B とおく。 $A = 30^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし, H は辺 BC 上の点である。このとき $\frac{AH}{BC}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos B$ の値を求めよ。

3 自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

- (1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。
- (2) a と b が互いに素で、 c と d がどちらも素数 p の倍数ならば、 $p = 5$ であることを示せ。ただし、2 つの自然数が互いに素とは、1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

4 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。

- 5** 座標平面上に点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ を取る。線分 AB 上に点 P を取り、 P から x 軸に下ろした垂線を PH , A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし、また P は A と異なるものとする。 O を原点とし $\triangle OPM$ を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

6 n を自然数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とするとき、

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_nC_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_nC_k$ は二項係数である。

(2) 不等式

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ。

7 a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0,0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

8 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし、 X が平方数であるとは、ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである。

9 $f(x) = \frac{1}{x}$ とし、また実数 a, b について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において常に $f(x) \geq g(x)$ が成り立つために a, b が満たすべき条件を求めよ。

(2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1, 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $(2, \frac{1}{2})$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき、 $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3) (2) で定めた $y = g_1(x), y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の3つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

10 次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x = \tan^3 \theta$ により, 定積分 $\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ を求めよ。

(2) $t > 1$ に対して $g(t) = \int_1^t \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx$ と定める。 $t \rightarrow \infty$ のとき $g(t) - at^b$ が収束するような正の実数 a, b を求めよ。

11 次の問いに答えよ。

- (1) 5以上の素数は、ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。
- (2) N を自然数とする。 $6N-1$ は、 $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。
- (3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

12 a を実数とすると、関数

$$f(x) = x + a^2 - 2, \quad g(x) = x(x - a)(x - a - 2)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 命題「 $f(x) \geq 0 \implies g(x) \geq 0$ 」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。
- (2) 命題「 $x \geq 0 \implies f(x) \geq 0$ または $g(x) \geq 0$ 」がすべての実数 x について成り立つために a が満たすべき条件を求めよ。