

(1)

$AB=c, AC=b$ とすると、三平方の定理より

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + p^2 \\ \Leftrightarrow p^2 &= (c+b)(c-b) \end{aligned}$$

となり、 p は素数で b, c は自然数なので

$$c+b=p^2, c-b=1$$

となる。これを解いて

$$AB=c=\frac{p^2+1}{2}, CA=b=\frac{p^2-1}{2}$$

となる。 p は 3 以上の奇数なので、 b, c は確かに自然数である。

$$(\text{答}) AB=\frac{p^2+1}{2}, CA=\frac{p^2-1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} \tan \angle A &= \frac{BC}{CA} \\ &= \frac{2p}{p^2-1} \\ &= \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、 $p \geq 3$ なので $\textcircled{1} > 0$ となる。また

$$\textcircled{1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$$

となるので $\textcircled{1}$ は整数にならない。また

$$\begin{aligned} \tan \angle B &= \frac{CA}{BC} \\ &= \frac{p^2-1}{2p} \\ &= \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} \end{aligned}$$

となり、 p は 3 以上の整数なので

$$2 \tan \angle B = p - \frac{1}{p}$$

は整数ではない。

よって $\tan \angle B$ は整数にならない。

(証明終)

(1)

1 から i, j, k が全て互いに異なる確率を引けば良いので

$$1 - \frac{{}_6P_3}{6^3} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

となる。

(答) $\frac{4}{9}$

(2)

三角形が出来る時は、鈍角三角形、直角三角形、正三角形の3パターンあり、それぞれの面積は、

$$\text{鈍角三角形} : \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin \frac{2}{3} \pi = \sqrt{3}$$

$$\text{直角三角形} : \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{正三角形} : \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

なので、それぞれ得点は3, 12, 27となる。

よって、得点が27となるのは、正三角形の時であり、正三角形になる i, j, k の組み合わせは $\{1, 3, 5\}$ もしくは $\{2, 4, 6\}$ である。それぞれに対して3!通りあるので、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{18}$$

となる。

(答) $\frac{1}{18}$

(3)

同様に、鈍角三角形、直角三角形になる確率は、それぞれ

$$\text{鈍角三角形} : \frac{6 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{直角三角形} : \frac{12 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{3}$$

となるので、求める期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{3} + 27 \cdot \frac{1}{18} = 6$$

となる。

(答) 6

AB を c , BC を a , CA を b , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R , $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}b}{2} = c = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{abc}{4R}$$

となる。まず

$$a = 2S, b = \sqrt{2}S, c = S \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

であるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{r}{2}(2S + \sqrt{2}S + S) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{3 + \sqrt{2}} = \frac{2}{7}(3 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

となる。また、 $\textcircled{1}$ より $a > b > c$ なので、点 A から直線 BC に下ろした垂線の足 P は辺 BC 上にある。よって

$$\begin{aligned} BC &= BP + PC \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{c^2 - 1^2} + \sqrt{b^2 - 1^2} \\ \Leftrightarrow 2S &= \sqrt{S^2 - 1} + \sqrt{2S^2 - 1} \\ \Leftrightarrow 4S^2 &= 3S^2 - 2 + 2\sqrt{(S^2 - 1)(2S^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow (S^2 + 2)^2 &= 4(S^2 - 1)(2S^2 - 1) \\ \Leftrightarrow S^2(7S^2 - 16) &= 0 \\ \Leftrightarrow S &= \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

となる。よって

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{2}S^2}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{面積 } \frac{4\sqrt{7}}{7}, \text{ 内接円の半径 } \frac{2}{7}(3 - \sqrt{2}), \text{ 外接円の半径 } \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

$x < 2$ のとき

$$f(x) = x^2 + ax - 2a + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、 $x \geq 2$ のとき

$$f(x) = x^2 - ax + 2a + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2a \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。この二つの軸である $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$ に注目して場合分けをする。

[1] $a \leq -4$ のとき

$-\frac{a}{2} \geq 2$, $\frac{a}{2} \leq 2$ より、 $f(x)$ は $x < 2$ で単調減少、 $x \geq 2$ で単調増加なので、最小値は

$$f(2) = 4 + \frac{a^2}{4} \text{ となる。}$$

[2] $-4 \leq a \leq 4$ のとき

①は $x = -\frac{a}{2}$ で最小値 $-2a$ をとり、②は $x = 2$ で最小値 $4 + \frac{a^2}{4}$ をとる。ここで

$$4 + \frac{a^2}{4} - (-2a) = \frac{(a+4)^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{a^2}{4} \geq -2a$$

より、 $f(x)$ の最小値は $-2a$ である。

[3] $4 \leq a$ のとき

①は $x = -\frac{a}{2}$ で最小値 $-2a$ をとり、②は $x = \frac{a}{2}$ で最小値 $2a$ をとる。

$2a > -2a$ となるので最小値は $-2a$ である。

以上[1], [2], [3]より、 $a \leq -4$ のとき最小値は $4 + \frac{a^2}{4}$, $a > -4$ のとき最小値は $-2a$ である。

$$(\text{答}) \begin{cases} 4 + \frac{a^2}{4} & (a \leq -4) \\ -2a & (a > -4) \end{cases}$$

(1)

$a=0$ のとき直線は $y=b$ となりこのとき D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (b-x^2) dx \\ &= \left[bx - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \\ &= \frac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となるので条件より

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。よって格子点は

$$(-1,1), (-1,2), (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)$$

の7個となる。

(答)7個

(2)

放物線と直線の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

となるので条件より

$$\begin{aligned} \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= 3 \end{aligned}$$

となる。また、ここで $x^2-ax-b=0$ に解と係数の関係を用いると

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta = 2\alpha + 3 \\ b &= -\alpha\beta = -\alpha(\alpha+3) = -\frac{a-3}{2} \cdot \frac{a+3}{2} \end{aligned}$$

となる。 a が偶数だと、 b が整数にならず不適である。よって、 a は奇数であり、このとき α は整数になる。

よって、対応 $(x_0, y_0) \mapsto (x_0, y_0 - (ax_0 + b))$ によって、 D に含まれる格子点の個数は

$$D_1: x^2 - ax - b = (x-\alpha)(x-\alpha-3) \leq y \leq 0$$

に含まれる格子点の個数に等しい事が分かる。

さらに、対応 $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 - \alpha, y_0)$ によって、 D_1 に含まれる格子点の個数は

$$D_2: x(x-3) \leq y \leq 0$$

に含まれる格子点の個数に等しい事が分かる。

よって、 D に含まれる格子点の個数は一定である。

(証明終)

(1)

$X(10)=0$ となるのは奇数と偶数の出た回数が同じときなので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 {}_{10}C_5 = \frac{63}{256}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{63}{256}$$

(2)

題意を満たす移動のとき、

$$X(1)=X(5)=1, X(i)>0 \quad (i=2, 3, 4) \quad \cdots \textcircled{1}$$

または

$$X(1)=X(5)=-1, X(i)<0 \quad (i=2, 3, 4)$$

であり、いずれも場合の数は等しい。また、

$$X(1)=X(5)=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$X(1)=X(5)=1 \text{ かつ } X(i)=0 \text{ なる } 1<i<5 \text{ が存在する} \quad \cdots \textcircled{3}$$

とすると、

$$(\textcircled{1} \text{ の場合の数}) = (\textcircled{2} \text{ の場合の数}) - (\textcircled{3} \text{ の場合の数})$$

である。ここで、

$$X(1)=1, X(5)=-1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

とすると、③を満たす移動は、最初に $X(i)=0$ となった以降の座標の符号を逆にすると、④

を満たす移動と一対一に対応する。よって、

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{ の場合の数}) &= (\textcircled{2} \text{ の場合の数}) - (\textcircled{3} \text{ の場合の数}) \\ &= (\textcircled{2} \text{ の場合の数}) - (\textcircled{4} \text{ の場合の数}) \\ &= {}_4C_2 - {}_4C_1 \\ &= 6 - 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるので、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 2}{2^6} = \frac{1}{16}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{1}{16}$$

(3)

(2)と同様にして、求める確率は、

$$\frac{2({}_8C_4 - {}_8C_3)}{2^{10}} = \frac{70-56}{2^9} = \frac{7}{256}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{7}{256}$$

(1)

条件より

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

となるので

$$\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MG} = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c}$$

となることが分かる。今、

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1^2 = 1,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} &= \left\{ -\frac{1}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c} \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - \frac{t}{6}\vec{c} \right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{6} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right) \right\} \cdot \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{t}{2}\right)\frac{t}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(2)

(1)より

$$|\overrightarrow{MC}|^2 = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right) \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 3t + 3)$$

$$|\overrightarrow{MG}|^2 = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{t}{6} \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{t^2}{36} = \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3)$$

であり、また、 $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MG}$ なので

$$\begin{aligned} \triangle CGM &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MG}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}} |t^2 - 3t + 3| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{24} \left| \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| \end{aligned}$$

となる。このとき $t = \frac{3}{2}$ で最小値 $\frac{\sqrt{3}}{32}$ をとる。(答) $t = \frac{3}{2}$, 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{32}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt = c$$

とおくと

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c$$

となるので

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (a \sin t + b \cos t + c) \cos t dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a}{2} \sin 2t + b \frac{1 + \cos 2t}{2} + c \cos t \right) dt \\ &= \pi b \end{aligned}$$

となる。ここで実数 α を用いて

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin x + b \cos x + \pi b \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + \pi b \end{aligned}$$

と表わすことができ $-\pi \leq x \leq \pi$ より、条件を見て

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} + \pi b &= 2\pi \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= \pi^2 (2 - b)^2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x + \pi^2 b^2 + 2ab \sin x \cos x + 2\pi b^2 \cos x + 2\pi ab \sin x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(a^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} + \pi^2 b^2 \right) dx \\ &= (a^2 + b^2) \pi + 2\pi^3 b^2 \\ &= \pi^3 (2 - b)^2 + 2\pi^3 b^2 \\ &= \pi^3 (3b^2 - 4b + 4) \\ &= \pi^3 \left\{ 3 \left(b - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{8}{3} \right\} \end{aligned}$$

以上より、 $b = \frac{2}{3}$ のとき、最小値 $\frac{8}{3} \pi^3$ を取る。このとき

$$\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\pi^2 \left(2 - \frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} \\ &= \pm \frac{2\sqrt{4\pi^2 - 1}}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) a = \pm \frac{2\sqrt{4\pi^2 - 1}}{3}, b = \frac{2}{3}, \text{最小値 } \frac{8}{3} \pi^3$$

$$\angle AOP = \alpha, \angle AOQ = \beta$$

とおくと

$$\tan \alpha = \frac{1}{p^2}, \quad \tan \beta = \frac{a}{q^2}$$

となり、 $\triangle OPQ$ の面積 S は、条件(1), (2)より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(p \cdot \frac{a}{q} - \frac{1}{p} \cdot q \right) \\ &= \frac{ap^2 - q^2}{2pq} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。よって

$$ap^2 - q^2 = 6pq$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \tan \angle POQ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{ap^2 - q^2}{p^2 q^2 + a} \\ &= \frac{6pq}{p^2 q^2 + a} \end{aligned}$$

なので、相加相乗平均の関係より

$$\tan \angle POQ = \frac{6pq}{p^2 q^2 + a} = \frac{6}{pq + \frac{a}{pq}} \leq \frac{3}{\sqrt{a}}$$

となり、等号は

$$pq = \frac{a}{pq} \Leftrightarrow pq = \sqrt{a}$$

のとき成り立つ。よって、

$$\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 16$$

となる。

(1)

$$3^n = k^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^n = (k+1)(k^2 - k + 1)$$

となるので

$$k+1=3^l \Leftrightarrow k=3^l-1$$

とおくと

$$k^2 - k + 1 = 3^{n-l}$$

$$\Leftrightarrow (3^l - 1)^2 - (3^l - 1) + 1 = 3^{n-l}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2l-1} - 3^l + 1 = 3^{n-l-1}$$

となり、左辺と右辺が一致するためには

$$3^{n-l-1} = 1$$

となる必要がある。このとき

$$3^{2l-1} = 3^l$$

$$\Leftrightarrow 2l-1=l$$

$$\therefore l=1$$

よって $k=2$ となり

$$3^{n-2} = 1$$

$$\therefore n=2$$

となる。

$$(\text{答}) (k, n) = (2, 2)$$

(2)

3^n の 1 の位は

$$\begin{cases} 3 & (n=4m-3) \\ 9 & (n=4m-2) \\ 7 & (n=4m-1) \\ 1 & (n=4m) \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots)$$

となり、 k^2-40 の 1 の位は k^2 の 1 の位と等しく

$$1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 \quad (k=1, 2, \dots, 10)$$

となる。このうち 1 と 9 のみが一致するので

$$n=4m-2 \text{ または } n=4m$$

となる。よって

$$n=2l \quad (l=1, 2, \dots)$$

とおけ

$$k^2 - 3^{2l} = 40$$

$$\Leftrightarrow (k+3^l)(k-3^l) = 40$$

$$\therefore (k+3^l) - (k-3^l) = 2 \cdot 3^l < 40$$

となる。よって

$$l=1, 2$$

となり

$$l=1 \text{ のとき } n=2 \text{ で } k^2=49 \Leftrightarrow k=7$$

$$l=2 \text{ のとき } n=4 \text{ で } k^2=121 \Leftrightarrow k=11$$

となる。

$$(\text{答}) (k, n) = (7, 2), (11, 4)$$

(1)

 $x=a$ で微分可能なので

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と表わすことができる。

 $x \rightarrow a+0$ のとき $x-a > 0$ であり

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

となるので

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

となる。

 $x \rightarrow a-0$ のとき $x-a < 0$ であり

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

となるので

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

となる。

以上より

$$0 \leq f'(a) \leq 0$$

となるので

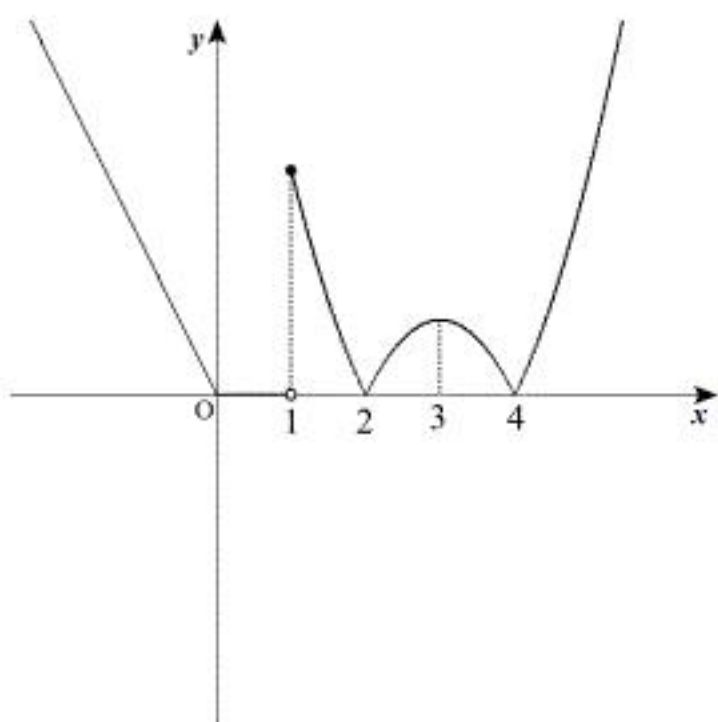
$$f'(a) = 0$$

となる。

(証明終)

(2)

問題のグラフは次のようになる。

[1] $0 < a < 1$ のとき $f(a) = 0$ であり

$$0 < r < a \quad \text{かつ} \quad 0 < r < 1-a$$

を満たすように r をとれば $|x-a| < r$ を満たすすべての x において

$$0 < a-r < x < a+r < 1$$

となるので、 $f(x) = 0$ であり

$$f(x) \leq f(a)$$

が成立する。

[2] $a = 1$ のとき $f(1) = 3$ であり

$$0 < r < 1$$

を満たすように r をとれば

$$|x-a| < r \Leftrightarrow 0 < 1-r < x < 1+r < 2$$

となる。よって

$$1-r < x < 1 \text{ のときは } f(x) = 0$$

$$1 < x < 1+r \text{ のときは } f(x) \leq 3$$

となるので

$$f(x) \leq f(1)$$

が成立する。

[3] $a = 3$ のとき同様に、 $0 < r < 1$ を満たすように r をとれば成り立つ。[4] 1 以外の微分不可能な点は、 $a = 0$ では $r > 0$ において

$$\left| -\frac{r}{2} - 0 \right| < r$$

となり

$$f\left(-\frac{r}{2}\right) = r > 0 = f(0)$$

となるので不適である。 $a = 2, 4$ のときも同様である。[5] 他の微分可能な点においては $f'(a) = 0$ となるものがないので不適である。

以上[1]~[5]より、求める範囲は

$$0 < a \leq 1, \quad a = 3$$

である。

(答) $0 < a \leq 1, \quad a = 3$

(3)

正しくない。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

とすると、

[1] $a = 0$ のとき任意の実数 x に対して

$$f(x) \leq f(0)$$

が成り立つ。

[2] $a \neq 0$ のとき

$$0 < r < |a|$$

とおけば、 $|x-a| < r$ のとき

$$|a| - |x| < |x-a| < r$$

$$\Leftrightarrow 0 < |a| - r < |x|$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

が成り立つので

$$f(x) = 0$$

となり

$$f(x) \leq f(a)$$

が成り立つ。

以上[1],[2]より、 $f(x)$ はこの命題の反例となっている。(答) 正しくない。反例： $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$