

(1) 余事象を考える.

a_1, a_2, a_3 のすべてが異なる場合は ${}_6P_3$ 通り.
よって,

$$P(n=0) = 1 - \frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{4}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $|n|=30$ のとき, $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_1|$ を小さい順に並べると,
 $0 \leq |a_i - a_j| \leq 5 \quad (1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6, i \neq j)$ より, $2, 3, 5$

$a_1 < a_2 < a_3$ のとき, $|a_1 - a_2| < |a_1 - a_3|, |a_2 - a_3| < |a_1 - a_3|$
に注意すると,

$$(a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1) = (-2, -3, 5), (-3, -2, 5)$$

$$\therefore (a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 6), (1, 4, 6)$$

3 数の並べかえはそれぞれ ${}_3P_3$ 通り

以上より

$$P(|n|=30) = \frac{2 \times {}_3P_3}{6^3} = \frac{1}{18} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおく.

正弦定理より,

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 1$$

$$a = 2 \sin 60^\circ = \underline{\sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\triangle ABC = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

$$bc = \frac{2}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} + 1 \quad \dots\dots ①$$

余弦定理より,

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = a^2$$

$$b^2 + c^2 - 2(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{2} = (\sqrt{3})^2$$

$$b^2 + c^2 = 4 + \sqrt{3} \quad \dots\dots ②$$

$$② + 2 \times ① \text{ より, } (b + c)^2 = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$② - 2 \times ① \text{ より, } (b - c)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

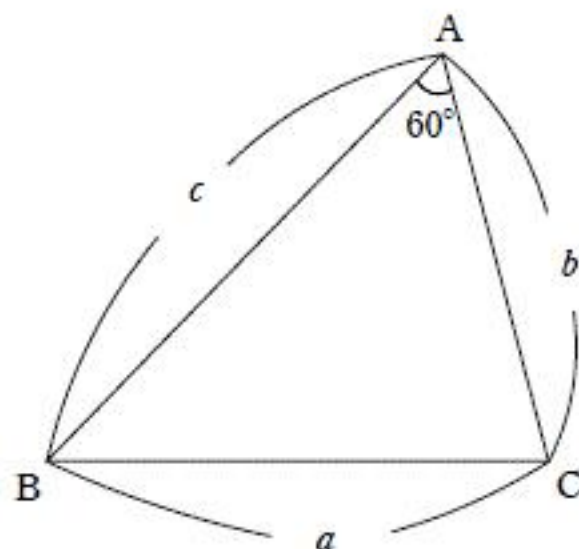
$c > b > 0$ に注意すると,

$$\begin{cases} b + c = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{27}}{2}} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} c - b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots ④ \end{cases}$$

$$(③ - ④) \div 2 \text{ より, } \underline{b = \sqrt{2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(③ + ④) \div 2 \text{ より, } \underline{c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$



AB, CD の中点をそれぞれ M, N とし,
立体の断面 $\triangle OMN$ を考える.

OA = OB より, OM は AB の垂直二等分線.
よって, 三平方の定理より,

$$OM = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

同様に $ON = 2$

また, $MN = AD = BC = 2$ であるから,

$\triangle OMN$ は 1 辺の長さが 2 の正三角形.

(1) $(OABCD \text{ の高さ}) = (\triangle OMN \text{ の高さ}) = \underline{\sqrt{3}}$ (答)

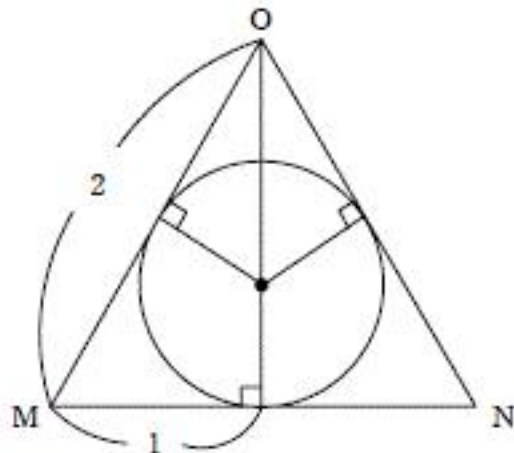
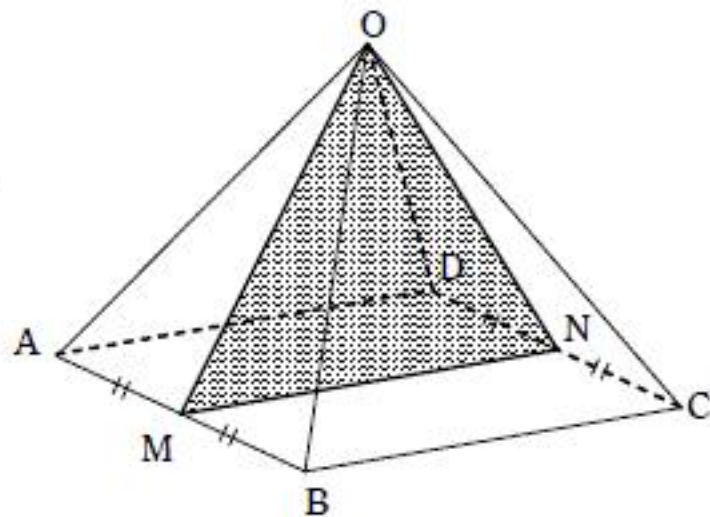
(2) $\triangle OAB, \triangle OCD$, 正方形 ABCD 上の
球の接点はそれぞれ辺 OM, ON, MN
にあるので,

(球 S の半径) = ($\triangle OMN$ の内接円の半径)

$$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{.....(答)}$$

(3) (表面積) $= 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \underline{\frac{4}{3}\pi}$ (答)

(体積) $= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi}$ (答)



4

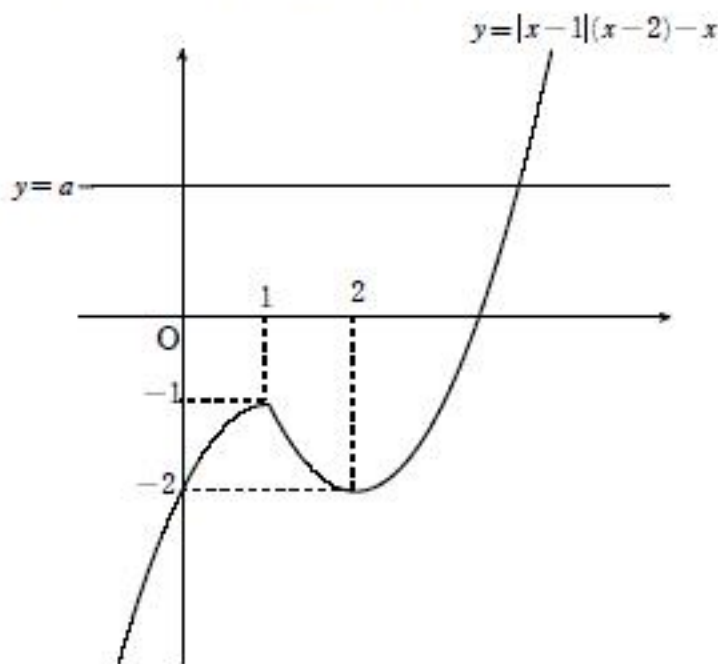
 $|x-1|(x-2)=x+a$ のとき,

$$a = |x-1|(x-2) - x = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x - 2 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$y=f(x)$ と $y=x+a$ の
共有点の個数は、 $y=a$ と

$y=|x-1|(x-2)-x$ の共有点の
個数に等しいので、

$a > -1$ のとき	1 個	(答)
$a = -1$ のとき	2 個	
$-2 < a < -1$ のとき	3 個	
$a = -2$ のとき	2 個	
$a < -2$ のとき	1 個	



- (1) $y=x$ に平行な直線と C との接点を
 P とすれば、 P と $y=x$ との距離は最大となる。

$$y=ax^2 \text{ について, } y'=2ax$$

$$2ax=1 \text{ のとき, } x=\frac{1}{2a}$$

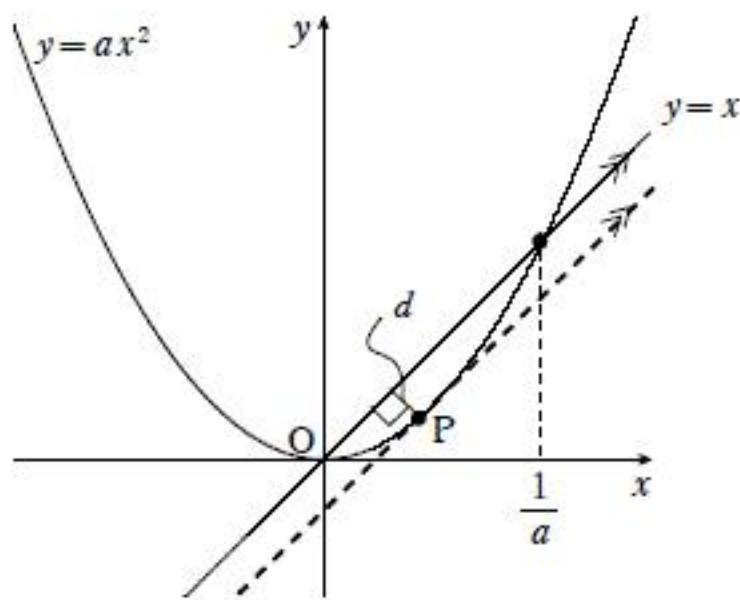
$$y=a \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a}$$

$$\text{したがって, } s=\frac{1}{2a}, t=\frac{1}{4a} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$P\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right) \text{ と } l: x-y=0 \text{ との距離 } d \text{ は,}$$

$$d = \frac{\left| \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{1}{4a}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}a} \quad \dots\dots(\text{答})$$

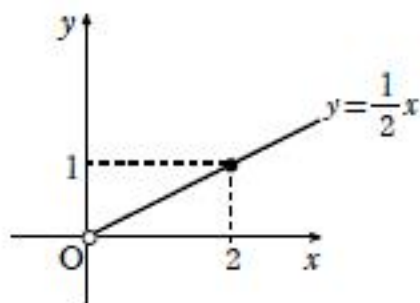
$$\text{また, } P \text{ での接線の傾きは } y=x \text{ と同じ } \underline{1} \quad \dots\dots(\text{答})$$



- (2) (1)の結果より, $t=\frac{1}{2}s$

$$\text{また, } a>0 \text{ より, } s>0$$

$$\text{よって, } P(s, t) \text{ の軌跡は, 直線 } y=\frac{1}{2}x \text{ の } x>0 \text{ の部分} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \text{ のとき,}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

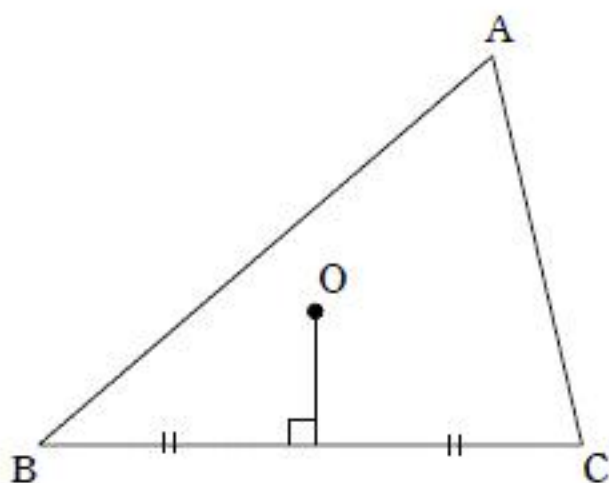
$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$$

よって、O は BC の中点となる。

したがって、 $\triangle ABC$ の外接円は、

BC を直径とする円となるので、

$\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形。□



$$(2) \quad \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA} \text{ のとき, } \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$$

$$\left(k - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$k \neq \frac{1}{3} \text{ より, } \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3k-1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3k-1}\overrightarrow{OC} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

BC の中点を M とおくと、 $k \neq \frac{1}{3}$ より、 $O \neq M$ で、

OM は BC の垂直二等分線。

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{BC} & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①、②より、 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OM}$ よって③より、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$

したがって、A は BC の垂直二等分線上にあるので、 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形 □

7 手の出し方は全部で 3^n 通り.

(1) 1人だけ勝つとき, 勝つ人は n 通り, 勝ち手は 3 通り

よって,
$$\frac{n \times 3}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 余事象に注目する.

k 人が勝つとき, 勝つ人は ${}_nC_k$ 通り, 勝ち手は 3 通り

よって,
$$\frac{{}_nC_k \times 3}{3^n} = \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

したがって, あいこになる確率は,

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}} = 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k$$

ここで,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k = {}_nC_0 x^0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k x^k \right) + {}_nC_n x^n \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k x^k \right) + x^n\end{aligned}$$

であるから, $x=1$ のとき,

$$2^n = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k \right) + 1 \quad \therefore \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k = 2^n - 2$$

よって, あいこになる確率は,

$$1 - \frac{1}{3^{n-1}} (2^n - 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 勝つ人数の期待値は,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot {}_nC_k$$

ここで, $(1+x)^n = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k x^k \right) + x^n$ の両辺を x で微分して,

$$n(1+x)^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot {}_nC_k x^{k-1} \right) + n \cdot x^{n-1}$$

$x=1$ のとき,

$$n \cdot 2^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot {}_nC_k \right) + n \quad \therefore \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot {}_nC_k = n \cdot 2^{n-1} - n$$

よって, 勝つ人数の期待値は,

$$\frac{1}{3^{n-1}} (n \cdot 2^{n-1} - n) = \frac{n(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$n+3$ 段目に上がるには,

(i) n 段目から 3 段 (2 段抜かし) $\rightarrow a_n$ 通り

(ii) $n+1$ 段目から 2 段 (1 段抜かし) $\rightarrow a_{n+1}$ 通り

(iii) $n+2$ 段目から 1 段 $\rightarrow a_{n+2}$ 通り

のどれか, よって,

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$(1) \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 4 = 7 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 7 = 13 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad a_{10} &= a_7 + a_8 + a_9 = a_7 + a_8 + (a_6 + a_7 + a_8) \\ &= a_6 + 2a_7 + 2a_8 = a_6 + 2a_7 + 2(a_5 + a_6 + a_7) \\ &= 2a_5 + 3a_6 + 4a_7 = 2a_5 + 3a_6 + 4(a_4 + a_5 + a_6) \\ &= 4a_4 + 6a_5 + 7a_6 = 4a_4 + 6a_5 + 7(a_3 + a_4 + a_5) \\ &= 7a_3 + 11a_4 + 13a_5 = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 7 + 13 \cdot 13 \\ &= \underline{274} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) 題意より, $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ は

$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ を反時計回りに 90° 回転させ,
 r 倍したものとわかる.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r \\ 1+r \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-r-r^2 \\ 1+r-r^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

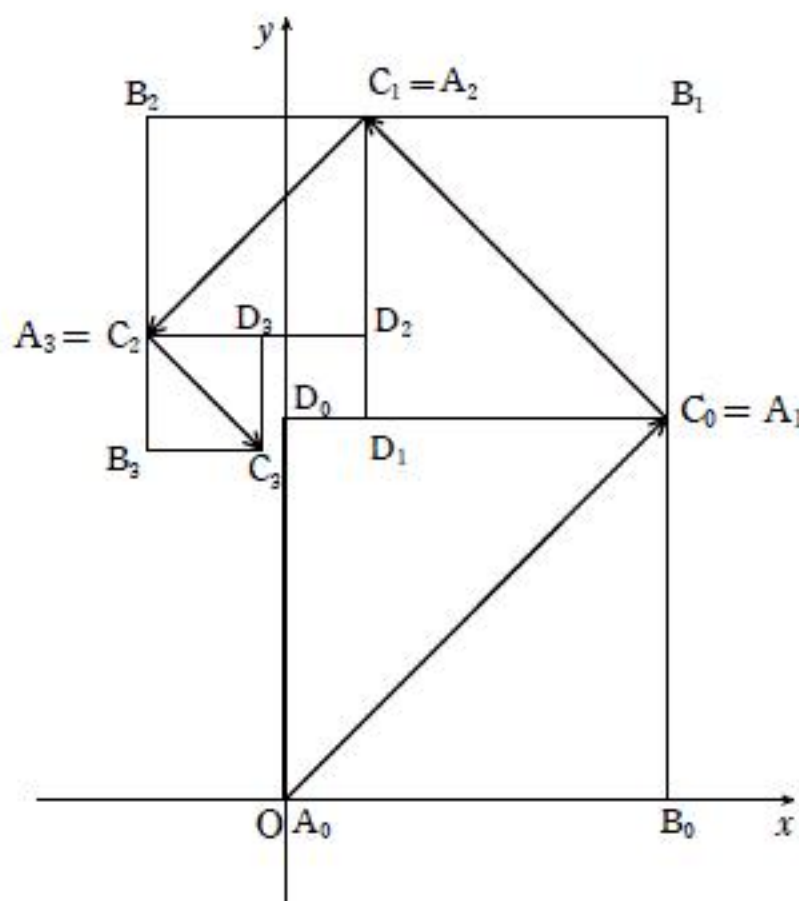
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_4} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-r-r^2+r^3 \\ 1+r-r^2-r^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって,

$$\overrightarrow{A_2(1-r, 1+r)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{A_3(1-r-r^2, 1+r-r^2)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{A_4(1-r-r^2+r^3, 1+r-r^2-r^3)} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}} = r^{4n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} = r^{4n+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}} = r^{4n+2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}} = r^{4n+3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より,

$$\overrightarrow{A_{4n}A_{4n+4}} = \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}} + \overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} + \overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}} + \overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \end{pmatrix} = r^{4n} \begin{pmatrix} 1-r-r^2+r^3 \\ 1+r-r^2-r^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} x_{n+1} - x_n = r^{4n} (1-r-r^2+r^3) & \dots\dots(\text{答}) \\ y_{n+1} - y_n = r^{4n} (1+r-r^2-r^3) & \dots\dots(\text{答}) \end{cases}$$

(3) (2) の結果より,

$$\begin{aligned}x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \\ &= (r^{4(n-1)} + r^{4(n-2)} + \dots + r^4 + 1)(1-r-r^2+r^3) \\ &= \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1-r-r^2+r^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_n - y_0 &= (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) \\ &= (r^{4(n-1)} + r^{4(n-2)} + \dots + r^4 + 1)(1+r-r^2-r^3) \\ &= \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1+r-r^2-r^3)\end{aligned}$$

$x_0 = 0, y_0 = 0$ より,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1-r-r^2+r^3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1-r)(1-r^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r}{1+r^2} (1-r^{4n})\end{aligned}$$

$0 < r < 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{4n} = 0$ よって,

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1-r}{1+r^2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

同様に,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1+r-r^2-r^3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{4n}}{1-r^4} (1-r)(1+r)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r}{1+r^2} (1-r^{4n}) \\ &= \frac{1+r}{1+r^2} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \text{ のとき,}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$$

したがって、O は BC の中点であるから、BC は $\triangle ABC$ の外接円の直径となる。

よって、 $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形。□

$$(2) \quad \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA} \text{ のとき, } \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$$

$$\left(k - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$k \neq \frac{1}{3} \text{ より, } \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3k-1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3k-1}\overrightarrow{OC} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、O は $\triangle ABC$ の外心ゆえ、BC の中点を M とおくと、

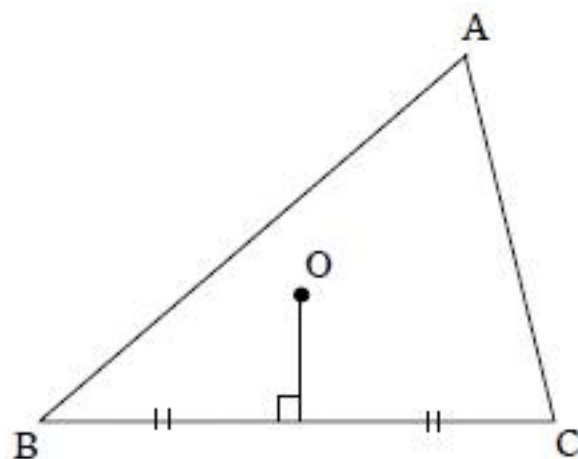
$$k \neq \frac{1}{3} \text{ より, } O \neq M$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{BC} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OM} \quad \text{よって} \textcircled{3} \text{ より, } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$$

したがって、A は BC の垂直二等分線上にあるので、 $\triangle ABC$ は

AB = AC の二等辺三角形 □



$$(3) \quad \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ より, } \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC} \text{ または } O = I$$

外心 O は BC の垂直二等分線上にあるので、

いずれにせよ、I は BC の垂直二等分線上にある。

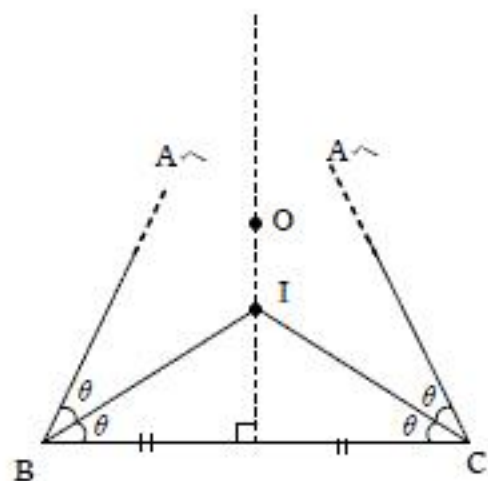
したがって、 $\angle IBC = \angle ICB$

$$\angle IBC = \angle ICB = \theta \text{ とおくと,}$$

$$\angle IBC = \angle IBA, \angle ICB = \angle ICA \text{ より,}$$

$$\angle ABC = 2\theta, \angle ACB = 2\theta$$

よって、 $\triangle ABC$ は AB = AC の二等辺三角形 □



$$(1) \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad \left(\begin{array}{l} t = \tan \theta \text{ とおく.} \\ dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ x = \tan \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とする.} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow x \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \alpha \end{array} \right)$$

$$= \int_0^\alpha \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^\alpha d\theta$$

$$= \alpha$$

よって,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{x=0}^{x=1} x \alpha dx \quad \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \alpha & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right)$$

$$= \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{4}} (\tan \alpha) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha$$

$$= \left[\alpha \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} - \frac{1}{2} [\tan \alpha]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad f(x) - g(x) = h(x) \text{ とおく.}$$

$$h'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{x}{1+x^2}$$

$$> \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dt - \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{1+t^2} \text{ は } t > 0 \text{ で単調減少} \right)$$

よって, $h(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調増加

$h(0) = 0$ より, $x > 0$ の範囲で $h(x) > 0$

したがって, $x > 0$ のとき, $f(x) > g(x)$ $\square$

x	0	...
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	↗

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) - 2 \log n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) - 2n \log n \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \log(k^2 + n^2) - 2 \log n \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \log(k^2 + n^2) - \log n^2 \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k^2 + n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} = \int_0^1 \log(x^2 + 1) dx$$

$$= [x \cdot \log(x^2 + 1)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \log 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \log 2 - [2x]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad \left(\begin{array}{l} x = \tan \theta \text{ とおく} \\ dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right)$$

$$= \log 2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \log 2 - 2 + 2 [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

12 n 回移動後に部屋 A_1 にいる確率を a_n とおく.

$n+1$ 回移動後に部屋 A_1 にいるためには, n 回移動後に部屋 A_i ($i=2, \dots, k$) にいて, そこから $n+1$ 回目の移動で部屋 A_1 に移動すればよい.

部屋 A_i ($i=2, \dots, k$) から部屋 A_1 に移動する確率は $\frac{1}{k}$

よって,

$$a_{n+1} = \frac{1}{k}(1 - a_n)$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k}\left(a_n - \frac{1}{k+1}\right) \text{ と変形できるので, } \left\{a_n - \frac{1}{k+1}\right\} \text{ は}$$

初項 $a_1 - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, 公比 $-\frac{1}{k}$ の等比数列. よって,

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{k+1} &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} \\ a_n &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} \left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{k+1} \left\{1 - \left(-\frac{1}{k}\right)^n\right\} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) 題意より,

$$f(x) = \left\{ x^2 + (a+1)x + \frac{1}{a} \right\} (x^2 + px + q)$$

と変形でき, $x^2 + px + q = 0$ は 2 つの虚数解をもつ.

展開すると,

$$f(x) = x^4 + (a+1+p)x^3 + \left\{ \frac{1}{a} + (a+1)p + q \right\} x^2 + \left\{ \frac{p}{a} + q(a+1) \right\} x + \frac{q}{a}$$

よって,

$$\begin{cases} a+1+p=0 \\ \frac{1}{a} + (a+1)p + q = b \\ \frac{p}{a} + q(a+1) = c \\ \frac{q}{a} = 2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = -a-1 \\ q = 2a \\ b = \frac{1}{a} - a^2 - 1 \\ c = 2a^2 + 2a - 1 - \frac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{.....(答)} \\ \text{.....(答)} \end{matrix}$$

(2) $x^2 + px + q = 0$, すなわち, $x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ が 2 つの虚数解をもつことより,

$$(a+1)^2 - 8a < 0$$

$$a^2 - 6a + 1 < 0$$

$$3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{.....①}$$

$x^2 + (a+1)x + \frac{1}{a} = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β をもつことより,

$$(a+1)^2 - \frac{4}{a} > 0$$

①より, $a > 0$ であるから, 両辺に a をかけて,

$$a(a+1)^2 - 4 > 0$$

$$a^3 + 2a^2 + a - 4 > 0$$

$$(a-1)(a^2 + 3a + 4) > 0$$

$$a^2 + 3a + 4 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ より, 両辺を } a^2 + 3a + 4 \text{ で割って,}$$

$$a-1 > 0$$

$$a > 1 \quad \text{.....②}$$

①, ②より,

$$1 < a < 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{.....(答)}$$

(3) $b = \frac{1}{a} - a^2 - 1 = g(a)$ とおく.

$$g'(a) = -\frac{1}{a^2} - 2a$$

$a > 0$ のとき $g'(a) < 0$ であるから,

$1 < a < 3 + 2\sqrt{2}$ のとき, $g(a)$ は単調減少

$$g(1) = -1, g(3 + 2\sqrt{2}) = -14\sqrt{2} - 15$$

よって,

$$-14\sqrt{2} - 15 < b < -1 \quad \text{.....(答)}$$

a	1	...	$3 + \sqrt{2}$
$g'(a)$	-		
$g(a)$	↘		

$$(1) \sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy} \quad (x > 0, y > 0)$$

の両辺を y で割って,

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} \geq \frac{x}{y} + 1 + a\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$\frac{x}{y} = t$ とおくと,

$$\sqrt{t^2 + 1} \geq t + 1 + a\sqrt{t}$$

$$\sqrt{t^2 + 1} - t - 1 \geq a\sqrt{t}$$

$$\frac{\sqrt{t^2 + 1} - t - 1}{\sqrt{t}} \geq a$$

$x > 0, y > 0$ より $t > 0$ であるから, これが任意の $t > 0$ に対して成り立てばよい.

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} - t - 1}{\sqrt{t}} \text{ とおくと,}$$

$$f'(t) = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} - 1\right)\sqrt{t} - (\sqrt{t^2 + 1} - t - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}$$

$$= \frac{(t-1)(t+1-\sqrt{t^2+1})}{2t\sqrt{t}\sqrt{t^2+1}} \times \frac{t+1+\sqrt{t^2+1}}{t+1+\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{t-1}{\sqrt{t}\sqrt{t^2+1}(t+1+\sqrt{t^2+1})}$$

$$f(1) = \sqrt{2} - 2 \text{ より,}$$

$$\max a = \sqrt{2} - 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

t	0	...	1	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	$\sqrt{2} - 2$	$\nearrow$

(2) $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ のとき,

$$abcd > \frac{4}{27} \quad \text{かつ} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) > \frac{4}{27} \quad \dots\dots(*)$$

が成り立たないことを示せばよい.

(*) が成り立つための必要条件は,

$$abcd \cdot (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) > \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{27} \quad \dots\dots(\star)$$

ここで, $f(a) = a(1-a^2)$ とおくと,

$$f'(a) = 1 - 3a^2 = (1 + \sqrt{3}a)(1 - \sqrt{3}a)$$

$$\text{増減表より, } 0 \leq f(a) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$0 \leq f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \cdot f(d) \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{27}$$

これは ($\star$) を満たさないのので, (*) は成り立たない.

以上より, $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ のとき,

$$abcd \leq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leq \frac{4}{27}$$

が成り立つ. $\square$

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

$x=0, y=0$ のとき, 3 式はすべて成り立ち, このとき, $x^2+y^2=0$
 $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $x \geq 0, y \geq 0$ より,

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \left(r > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{とおける.}$$

このとき, $(x^2+y^2)^2 - (3x^2-y^2)y = 0$ より,

$$r^4 - (3r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) \cdot r \sin \theta = 0$$

$$r^4 - r^3 \{3(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta\} \sin \theta = 0$$

$$r^4 - r^3(3 - 4\sin^2 \theta) \sin \theta = 0$$

$$r^4 - r^3(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) = 0$$

$$r^4 - r^3 \sin 3\theta = 0$$

$$r^3(r - \sin 3\theta) = 0$$

$$r > 0 \text{ より, } r = \sin 3\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } -1 \leq \sin 3\theta \leq 1 \therefore 0 < r \leq 1$$

よって, $x^2+y^2=r^2$ の最大値は $1^2=1$ (答)

$$\text{そのとき, } \sin 3\theta = 1 \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ より, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

したがって, x^2+y^2 が最大となるときの x, y の値は,

$$x = r \cos \theta = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{.....(答)}$$

$$y = r \sin \theta = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$