

平成23年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があつたら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は16ページです。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

- 1** 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1 , 2 回目に出る目を a_2 , 3 回目に出る目を a_3 とし, 整数 n を

$$n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

と定める。

- (1) $n = 0$ である確率を求めよ。
(2) $|n| = 30$ である確率を求めよ。

2 三角形 ABC の面積は $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > AC$ である。

このとき, 三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

3 四角錐 $OABCD$ において、底面 $ABCD$ は1辺の長さ 2 の正方形で、

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{5}$$

である。

- (1) 四角錐 $OABCD$ の高さを求めよ。
- (2) 四角錐 $OABCD$ に内接する球 S の半径を求めよ。
- (3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ。

4 実数 x の関数 $f(x) = |x-1|(x-2)$ を考える。 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + a$

との共有点の個数は、定数 a の値によって、どのように変わるかを調べよ。

5 a は正の実数とし、座標平面上の直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。

C 上の点 (x, y) $\left(\text{ただし } 0 < x < \frac{1}{a} \right)$ で l との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。

以下の問いに答えよ。

(1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。

6 三角形 ABC の外心を O, 重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

7 n 人 ($n \geq 3$) でじゃんけんを 1 回行うとき、次の問いに答えよ。

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり、勝つ人数が 0 の場合である。

8 n 段の階段を上るのに、一步で 1 段, 2 段, または 3 段を上ることができるとする。

この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ である。

(1) a_4, a_5 の値を求めよ。

(2) $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ ($n \geq 1$) の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_{10} の値を求めよ。

9 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) があり、その頂点を反時計回りに A_n, B_n, C_n, D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i) 正方形 R_0 の頂点は $A_0(0, 0), B_0(1, 0), C_0(1, 1), D_0(0, 1)$ である。

(ii) $A_{n+1} = C_n$ で、点 D_{n+1} は辺 $C_n D_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_2, A_3, A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とおく。 $x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r, n の式で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を r を用いて表せ。

10 三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

11 $f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$ の値を求めよ。

- 12** $k+1$ 個 ($k \geq 1$) の部屋 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等しい確率 $\frac{1}{k}$ で 1 つ選び, そこへ移動する。最初, 部屋 A_0 にいた千葉君が, n 回 ($n \geq 1$) 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

13 a, b, c は実数とし,

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち,

$$\alpha + \beta = -(a + 1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

14 次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x, y に対して成立するような, 最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leq \frac{4}{27} \text{ または } (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - d^2) \leq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

15 座標平面上の点 (x, y) が

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき、 $x^2 + y^2$ の最大値、およびその最大値を与える x, y の値を求めよ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号								
数学Ⅰ 数学 A	教育学部 算数科選修 理科教育分野 技術科教育分野	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4				
1	2	3	4							
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学 A 数学 B	文学部 法経学部 園芸学部	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	1	2	5	6				
	1	2	5	6						
	教育学部 情報教育分野	<table><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	2	5	6	7				
	2	5	6	7						
教育学部 数学科教育分野	<table><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	2	5	6	8					
2	5	6	8							
教育学部 数学科教育分野	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td><td></td></tr></table>	2	3	5	6	7	8			
2	3	5	6							
7	8									
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学 A 数学 B 数学 C	理学部 工学部 生物学科，地球科学科 建築学科 都市環境システム学科 デザイン学科	<table><tr><td>5</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>12</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	5	9	10	11	12			
	5	9	10	11						
	12									
	理学部 薬学部 工学部 物理学科，化学科 機械工学科 メディカルシステム工学科 電気電子工学科 ナノサイエンス学科 共生応用化学科 画像科学科 情報画像学科 先進科学プログラム	<table><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	9	10	11	12	13			
9	10	11	12							
13										
医学部		<table><tr><td>10</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr><tr><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	10	12	13	14	15			
10	12	13	14							
15										
理学部 数学・情報数理学科		<table><tr><td>7</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>12</td><td>13</td><td></td><td></td></tr></table>	7	9	10	11	12	13		
7	9	10	11							
12	13									