

$f(x) = x^2 - ax + a$ とおく.

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a \rightarrow \text{頂点} \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + a\right)$$

(I) $1 \leq x \leq 2$ の範囲で異なる 2 点で交わる

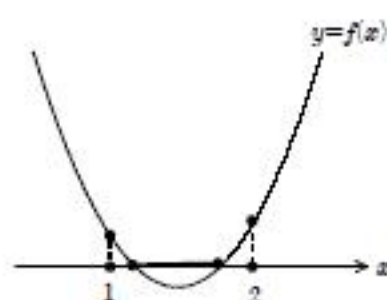
(II) $3 \leq x \leq 4$ の範囲で異なる 2 点で交わる

(III) $1 \leq x \leq 2$ の範囲で 1 点交わり, $3 \leq x \leq 4$ の範囲で 1 点交わる

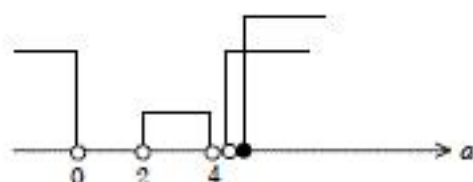
に場合分けして考えてみる.

(I)

$$\begin{cases} \text{軸: } 1 < \frac{a}{2} < 2 \\ \text{頂点: } -\frac{a^2}{4} + a < 0 \\ \text{端点: } f(1) \geq 0, f(2) \geq 0 \end{cases}$$



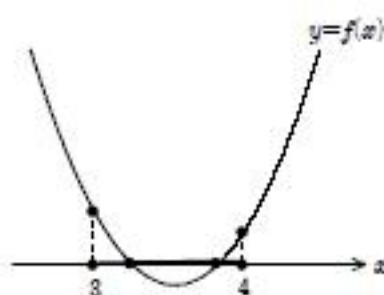
$$\begin{cases} 2 < a < 4 \\ a < 0, 4 < a \\ 1 \geq 0, a \leq 4 \end{cases}$$



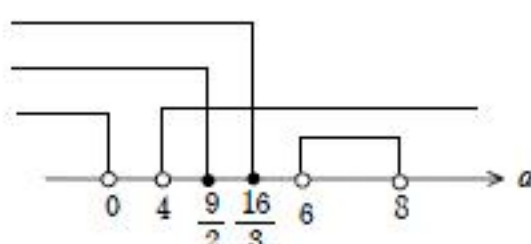
これは解なし.

(II)

$$\begin{cases} \text{軸: } 3 < \frac{a}{2} < 4 \\ \text{頂点: } -\frac{a^2}{4} + a < 0 \\ \text{端点: } f(3) \geq 0, f(4) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 6 < a < 8 \\ a < 0, 4 < a \\ a \leq \frac{9}{2}, a \leq \frac{16}{3} \end{cases}$$

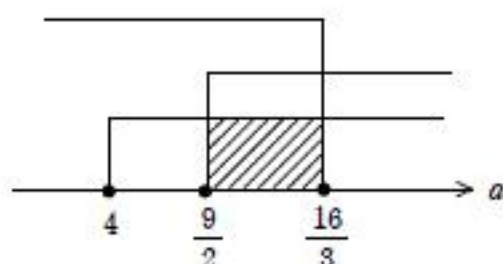
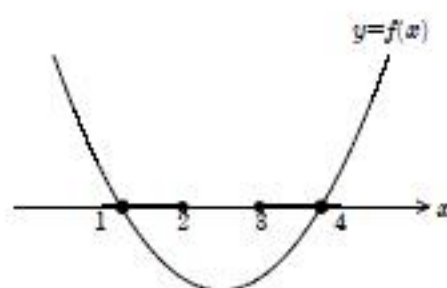


これは解なし.

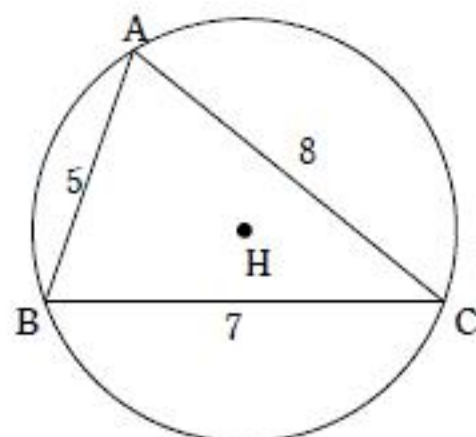
(III)

$$\begin{cases} f(1) \geq 0, f(2) \leq 0 \\ f(3) \leq 0, f(4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \geq 0, a \geq 4 \\ a \geq \frac{9}{2}, a \leq \frac{16}{3} \end{cases}$$



$$\therefore \frac{9}{2} \leq a \leq \frac{16}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$



Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとおくと、

OA = OB = OCより、Hは△ABCの外心となる。

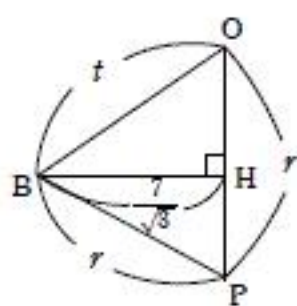
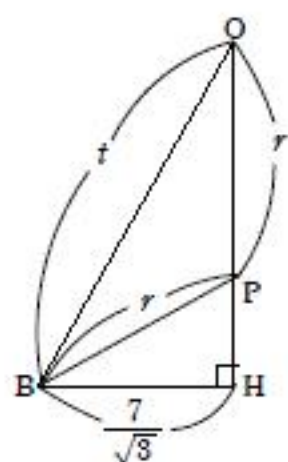
△ABCの外接円の半径をR、四面体OABCの外接球の中心をP、半径をrとおく。このとき、PA = PB = PCより、Pは直線OH上にある。

(1) 余弦定理より、 $5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \angle BAC = 7^2$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{2} \quad \therefore \angle BAC = 60^\circ \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 正弦定理より、 $\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots (\text{答})$

(3)



△OBH, △PBHそれぞれに三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}, \quad PH = \sqrt{r^2 - \frac{49}{3}} \\ \therefore \left| \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} - r \right| &= \sqrt{r^2 - \frac{49}{3}} \\ r^2 &= \frac{t^4}{4 \left(t^2 - \frac{49}{3} \right)} \end{aligned}$$

ここで、 $t > \frac{7}{\sqrt{3}}$ 、すなわち、 $t^2 > \frac{49}{3}$ より、 $t^2 - \frac{49}{3} = X$ とおくと、 $X > 0$ となり、

$$r^2 = \frac{\left(X + \frac{49}{3} \right)^2}{4X} = \frac{1}{4} \cdot \left(X + \frac{98}{3} + \frac{49^2}{9X} \right) \geq \frac{1}{4} \left(2\sqrt{X \cdot \frac{49^2}{9X}} + \frac{98}{3} \right) = \frac{49}{3}$$

(相加相乗平均)より、rの最小値は $\sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ また、等号成立は、

$$X = \frac{49^2}{9X}, \quad \text{すなわち、} \quad X = \frac{49}{3} \quad \text{のとき}$$

$$\therefore t^2 - \frac{49}{3} = \frac{49}{3}$$

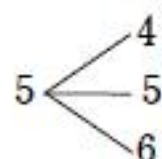
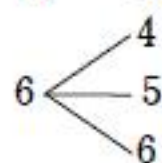
$$t^2 = \frac{2 \cdot 49}{3}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 49}{3}}$$

$$= \frac{7\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (1) 19以上となるのは、以下の8通り.

X_1 X_2



$$\therefore 1 - \frac{8}{36} = \frac{7}{9} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2) $X_1 \sim X_7$ の1つでも偶数であれば、積は偶数となるので、すべて奇数のときを考える.

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{128} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3)

(I) $X_1 \sim X_7$ のすべての奇数

(II) $X_1 \sim X_7$ の1つだけが2または6, 他は奇数

が余事象となる.

$$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot {}_7C_1 = \frac{367}{384} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (4) 余りだけを考えて,

$$X_1 X_2 \cdots X_7 = 1^7, 1^5 \cdot 2^2, 1^3 \cdot 2^4, 1 \cdot 2^6$$

となるときが, 3で割って余りが1となるとき.

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot {}_7C_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot {}_7C_3 + \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot {}_7C_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot (1 + 21 + 35 + 7) \\ &= \frac{64}{2187} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

分子を A とおくと, A は $mp^2q^2 < A < np^2q^2$ で, かつ, A は p でも q でも割り切れない.

$mp^2q^2 + 1$ から $np^2q^2 - 1$ までの $(np^2q^2 - 1) - (mp^2q^2 + 1) + 1 = (n - m)p^2q^2 - 1$ 個の整数のうち, p で割り切れるものは,

$$mp^2q^2 + p, mp^2q^2 + 2p, mp^2q^2 + 3p, \dots, mp^2q^2 + (npq^2 - mpq^2 - 1)p$$

$$\text{の } npq^2 - mpq^2 - 1 = (n - m)pq^2 - 1 \text{ 個}$$

q で割り切れるものは,

$$mp^2q^2 + q, mp^2q^2 + 2q, mp^2q^2 + 3q, \dots, mp^2q^2 + (np^2q - mp^2q - 1)q$$

$$\text{の } np^2q - mp^2q - 1 = (n - m)p^2q - 1 \text{ 個}$$

p, q 両方で割り切れるものは,

$$mp^2q^2 + pq, mp^2q^2 + 2pq, mp^2q^2 + 3pq, \dots, mp^2q^2 + (npq - mpq - 1)pq$$

$$\text{の } npq - mpq - 1 = (n - m)pq - 1 \text{ 個}$$

$$\begin{aligned} \therefore (n - m)p^2q^2 - 1 - \{(n - m)pq^2 - 1\} - \{(n - m)p^2q - 1\} + \{(n - m)pq - 1\} \\ = (n - m)pq(pq - p - q + 1) \end{aligned}$$

$$= (n - m)pq(p - 1)(q - 1) \text{ 個}$$

..... (答)

$y = x^2$ について, $y' = 2x$ より,

$$l_a: \begin{cases} \text{傾き} & 2a \\ \text{通る点} & (a, a^2) \end{cases} \quad \therefore y - a^2 = 2a(x - a) \quad y = 2ax - a^2$$

- (1) $2ax - a^2 > -x^2 + 2x - 5$ となるとき,
 $x^2 + 2(a-1)x - a^2 + 5 > 0$

x の 2 次方程式 $x^2 + 2(a-1)x - a^2 + 5 = 0$ の判別式を D とおくと,

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (-a^2 + 5) < 0$$

$$2a^2 - 2a - 4 < 0$$

$$2(a+1)(a-2) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 2$$

..... (答)

- (2) $y = 2ax - a^2 \iff a^2 - 2xa + y = 0$

$f(a) = a^2 - 2xa + y$ とおく. $f(a) = 0$ が $-1 < a < 2$ の範囲で解をもたないための

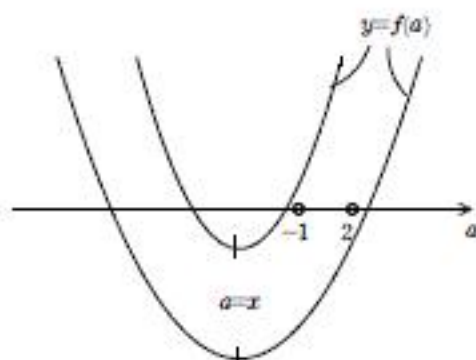
(x, y) の条件を考える.

$$f(a) = (a-x)^2 - x^2 + y$$

- (I) $x \leq -1$ のとき

$$f(-1) \geq 0 \text{ または } f(2) \leq 0$$

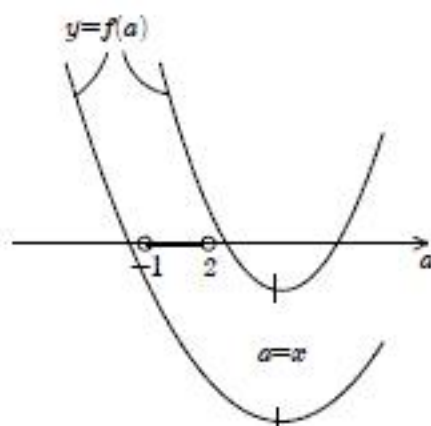
$$\therefore y \geq -2x-1 \text{ または } y \leq 4x-4$$



- (II) $x \geq 2$ のとき

$$f(2) \geq 0 \text{ または } f(-1) \leq 0$$

$$\therefore y \geq 4x-4 \text{ または } y \leq -2x-1$$

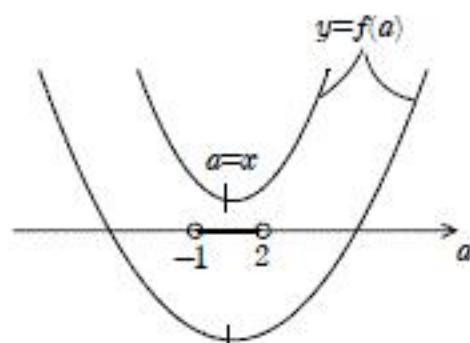


- (III) $-1 < x < 2$ のとき

$$-x^2 + y > 0 \text{ または}$$

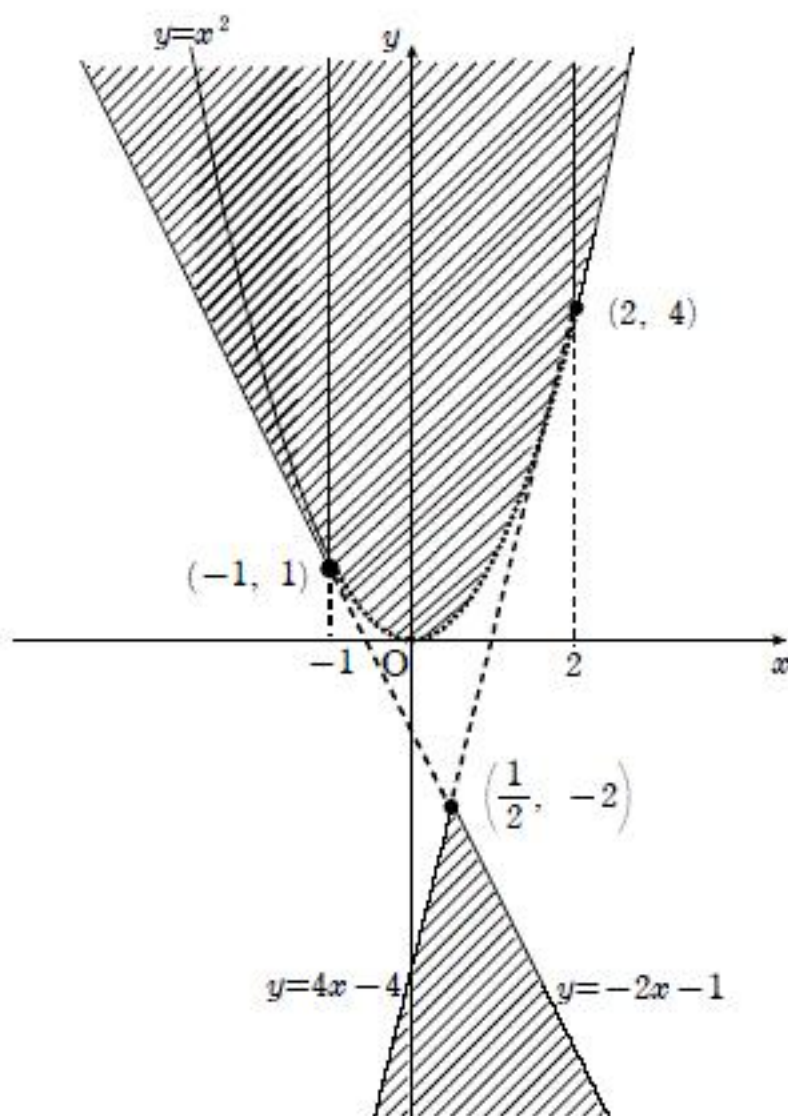
$$f(-1) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) \leq 0$$

$$\therefore y > x^2, \text{ または, } y \leq -2x-1 \quad \text{かつ} \quad y \leq 4x-4$$

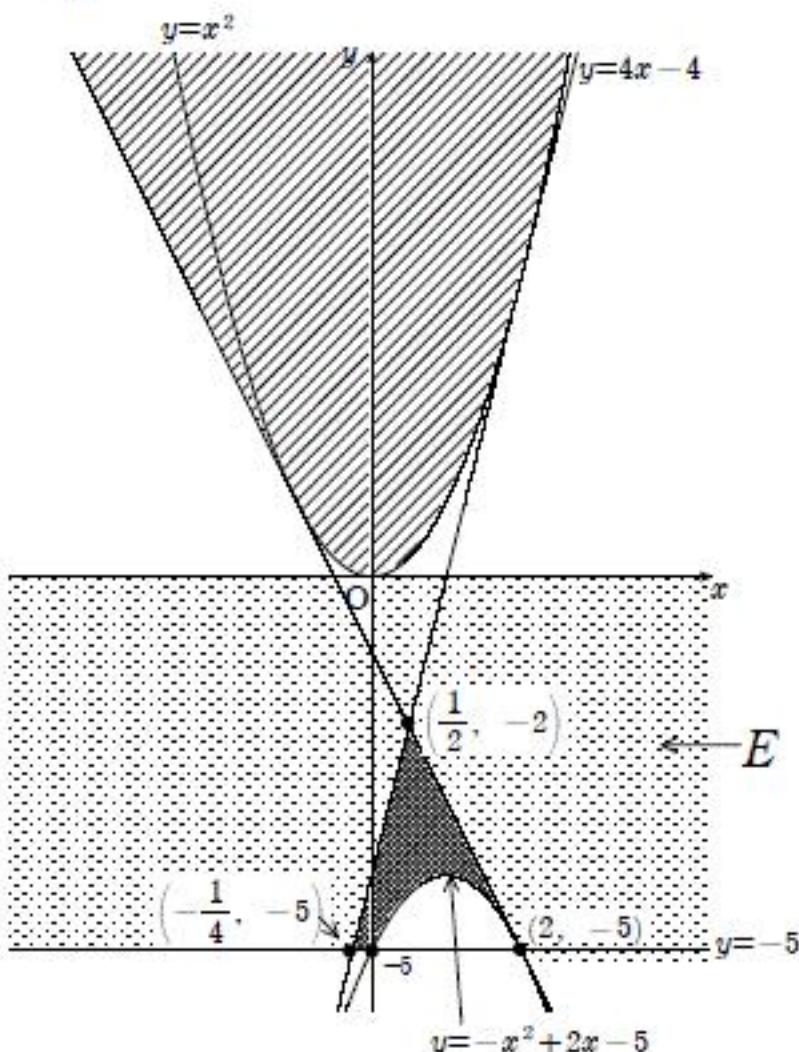


- (I) ~ (III) より D は図のようになる.

(破線は含まず)



- (3)



$y = -2x-1$ と $y = -x^2 + 2x - 5$ は接している
 ことから, D と E の共通部分は, 3 点

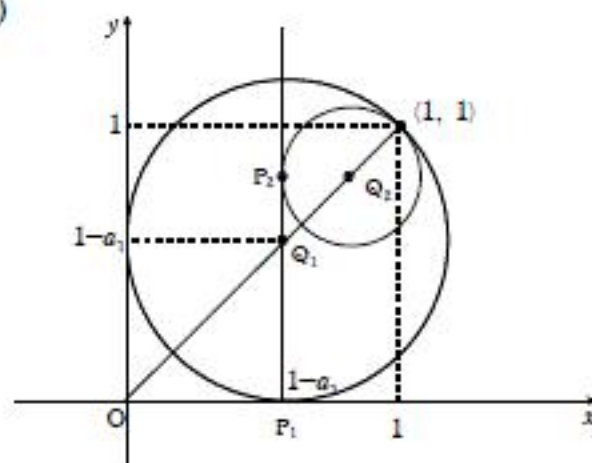
$$\left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-\frac{1}{4}, -5\right), (2, -5) \text{ で作られる}$$

三角形から, 放物線 $y = -x^2 + 2x - 5$ と
 直線 $y = -5$ で囲まれた部分を除いたものである.

$$\begin{aligned} \therefore & \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} \times 3 \times \frac{1}{2} - \int_0^2 \{-x^2 + 2x - 5 - (-5)\} dx \\ &= \frac{27}{8} - \frac{4}{3} = \frac{49}{24} \end{aligned}$$

..... (答)

(1)



$$C(a_n): \{x - (1 - a_n)\}^2 + \{y - (1 - a_n)\}^2 = (\sqrt{2}a_n)^2$$

の中心は $(1 - a_n, 1 - a_n)$, 半径 $\sqrt{2}a_n$

$$1 - a_1 = \sqrt{2}a_1 \quad \therefore a_1 = \sqrt{2} - 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

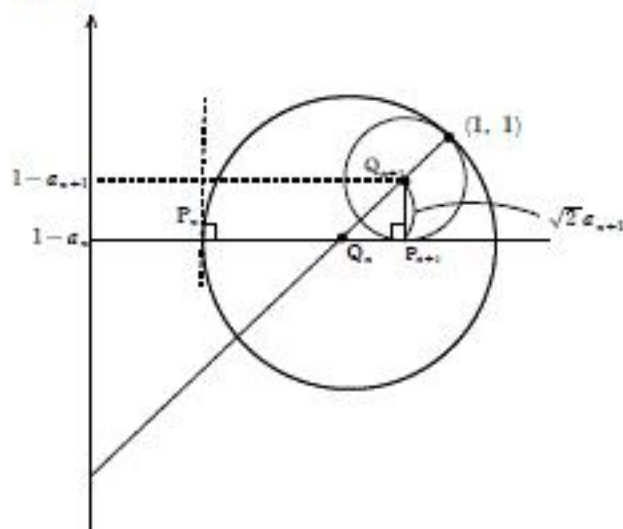
(2) また, $C(a_n)$ は $(1, 1)$ を必ず通ることに注意すると,

$$1 - a_2 - \sqrt{2}a_2 = 1 - a_1$$

$$(\sqrt{2} + 1)a_2 = \sqrt{2} - 1$$

$$a_2 = 3 - 2\sqrt{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

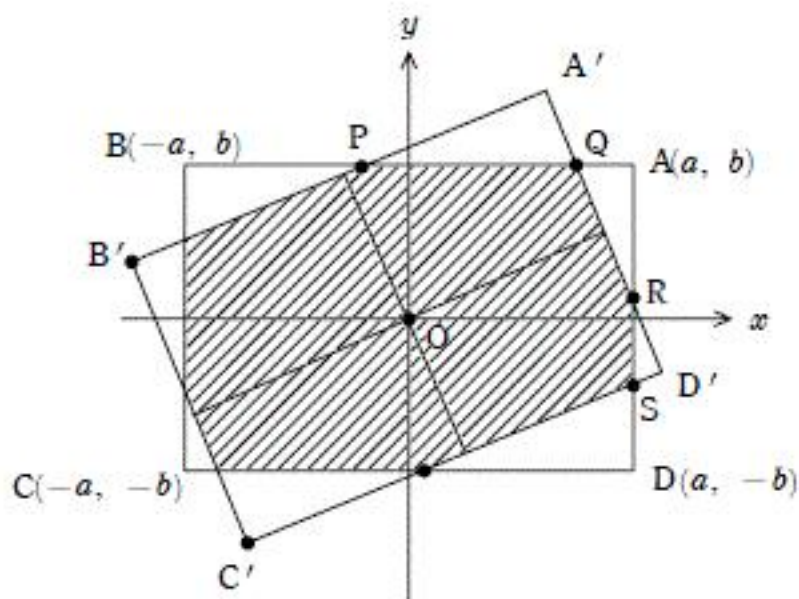
(3)



$$1 - a_{n+1} - \sqrt{2}a_{n+1} = 1 - a_n \text{ より,}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} a_n$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)^n = (\sqrt{2} - 1)^n \quad \dots\dots (\text{答})$$



$a > b$ とする.

$A(a, b), B(-a, b), C(-a, -b), D(a, -b)$ とおき, θ 回転したときのそれぞれの点を A', B', C', D' とおく.

$$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

D が A まで回転するとき, AB と $A'B'$, AB と $A'D'$, AD と $A'D'$, AD と $C'D'$ の交点をそれぞれ P, Q, R, S とおく.

求める面積は, 対称性を考えて, 四角形 $A'B'C'D' - \triangle A'PQ \times 2 - \triangle D'RS \times 2$

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cos \theta - b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ a \sin \theta - b \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A'B': y = (\tan \theta)x + \frac{b}{\cos \theta}$$

対称性より, $C'D': y = (\tan \theta)x - \frac{b}{\cos \theta}$

$$A'D': y = -\frac{1}{\tan \theta}x + \frac{a}{\sin \theta}$$

$$\therefore P\left(-\frac{b(1-\cos \theta)}{\sin \theta}, b\right), Q\left(\frac{a-b \sin \theta}{\cos \theta}, b\right), R\left(a, \frac{a(1-\cos \theta)}{\sin \theta}\right), \\ S\left(a, -\frac{b-a \sin \theta}{\cos \theta}\right)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \triangle A'PQ &= \left\{ \frac{a-b \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{b(1-\cos \theta)}{\sin \theta} \right\} (a \sin \theta + b \cos \theta - b) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(a \sin \theta + b \cos \theta - b)^2}{2 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle D'RS &= \left\{ \frac{a(1-\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{b-a \sin \theta}{\cos \theta} \right\} (a \cos \theta + b \sin \theta - a) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(a \cos \theta + b \sin \theta - a)^2}{2 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{四角形 } A'B'C'D' - \triangle A'PQ \times 2 - \triangle D'RS \times 2$$

$$\begin{aligned} &= 4ab - \frac{(a \sin \theta + b \cos \theta - b)^2}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{(a \cos \theta + b \sin \theta - a)^2}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{4ab \sin \theta - 2(a^2 + b^2)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \times \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{4ab(1 + \cos \theta) - 2(a^2 + b^2) \sin \theta}{\cos \theta(1 + \cos \theta)} \end{aligned}$$

(これは, $S(0) = 4ab$ を満たす)

$a < b$ のときも同様.

$a = b$ のとき, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となり, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4a^2$

$$\therefore S(\theta) = \begin{cases} \frac{4ab(1 + \cos \theta) - 2(a^2 + b^2) \sin \theta}{\cos \theta(1 + \cos \theta)} & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ 4a^2 & \left(a = b \text{ かつ } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

$$a_n = p + qn + rn^2 \quad \dots\dots ①$$

$$b_n = p + qn + rn^2 + sn^3 \quad \dots\dots ②$$

(1) ①に $n=1, 2, 3$ をそれぞれ代入して,

$$\begin{cases} a_1 = p + q + r & \dots\dots ③ \\ a_2 = p + 2q + 4r & \dots\dots ④ \\ a_3 = p + 3q + 9r & \dots\dots ⑤ \end{cases} \quad \begin{array}{ll} ④-③ \text{より,} & q+3r = a_2 - a_1 \quad \dots\dots ⑥ \\ ⑤-④ \text{より,} & q+5r = a_3 - a_2 \quad \dots\dots ⑦ \\ ⑦-⑥ \text{より,} & 2r = a_3 - 2a_2 + a_1 \end{array}$$

$\{a_n\}$ が整数列ならば, a_1, a_2, a_3 が整数ゆえ, $2r$ も整数. $\square$

(2) ②に $n=1, 2, 3, 4$ をそれぞれ代入して,

$$\begin{array}{llll} b_1 = p + q + r + s & \dots\dots ⑧ & ⑨-⑧ \text{より,} & q+3r+7s = b_2 - b_1 \quad \dots\dots ⑫ \\ b_2 = p + 2q + 4r + 8s & \dots\dots ⑨ & ⑩-⑨ \text{より,} & q+5r+19s = b_3 - b_2 \quad \dots\dots ⑬ \\ b_3 = p + 3q + 9r + 27s & \dots\dots ⑩ & ⑪-⑩ \text{より,} & q+7r+37s = b_4 - b_3 \quad \dots\dots ⑭ \\ b_4 = p + 4q + 16r + 64s & \dots\dots ⑪ & ⑬-⑫ \text{より,} & 2r+12s = b_3 - 2b_2 + b_1 \quad \dots\dots ⑮ \\ & & ⑭-⑬ \text{より,} & 2r+18s = b_4 - 2b_3 + b_2 \quad \dots\dots ⑯ \\ & & ⑯-⑮ \text{より,} & 6s = b_4 - 3b_3 + 3b_2 - b_1 \quad \dots\dots ⑰ \end{array}$$

$$⑮-⑰ \times 2 \text{ より,} \quad 2r = -2b_4 + 7b_3 - 8b_2 + 3b_1 \quad \dots\dots ⑱$$

$$⑫-⑱-⑰ \text{ より,} \quad q+r+s = b_4 - 4b_3 + 6b_2 - 3b_1 \quad \dots\dots ⑲$$

$$⑧-⑲ \text{ より,} \quad p = -b_4 + 4b_3 - 6b_2 + 4b_1$$

$\{b_n\}$ が整数列ならば, b_1, b_2, b_3, b_4 が整数ゆえ, $p, q+r+s, 2r, 6s$ がいずれも整数となる.

逆に $p, q+r+s, 2r, 6s$ がいずれも整数のとき,

$$b_{n+1} - b_n = q + (2n+1)r + (3n^2+3n+1)s = (q+r+s) + 2r \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 6s$$

で, $n, \frac{n(n+1)}{2}$ は整数ゆえ, $b_{n+1} - b_n$ は整数とわかる. また,

$b_1 = p + (q+r+s)$ も整数であるから, 帰納的に b_n は整数とわかる.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x \right) f''(x) dx &= \left[\left(\frac{a+b}{2} - x \right) \cdot f'(x) \right]_a^b - \int_a^b \{-1 \cdot f'(x)\} dx \\
 &= 0 + \int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad \square
 \end{aligned}$$

(2) 時刻 x における車が進んだ距離を $f(x)$ とおくと、条件より、

$$f(0) = 0, f(T) = L, f'(0) = f'(T) = 0$$

よって、(1)より、

$$\int_0^T \left(\frac{T}{2} - x \right) f''(x) dx = f(T) - f(0) (= L)$$

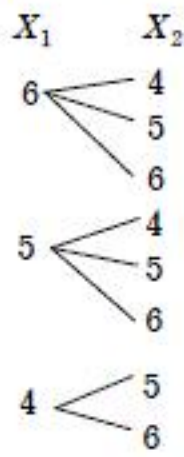
いま、 $0 \leq x \leq T$ において、常に $|f''(x)| < \frac{4L}{T^2}$ と仮定すると、

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^T \left(\frac{T}{2} - x \right) f''(x) dx \leq \int_0^T \left| \left(\frac{T}{2} - x \right) \right| |f''(x)| dx \\
 &< \int_0^T \left| \frac{T}{2} - x \right| \cdot \frac{4L}{T^2} dx = 2 \int_{\frac{T}{2}}^T \left(x - \frac{T}{2} \right) \cdot \frac{4L}{T^2} dx \\
 &= 2 \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{T}{2} x \right) \cdot \frac{4L}{T^2} \right]_{\frac{T}{2}}^T = 2 \cdot \frac{T^2}{8} \cdot \frac{4L}{T^2} = L
 \end{aligned}$$

よって、 $L < L$ となり、矛盾。

したがって、 $|f''(x)| \geq \frac{4L}{T^2}$ となる x が存在する。 $\square$

(1) 19以上となるのは以下の8通り.



$$\therefore 1 - \frac{8}{36} = \frac{7}{9} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 余事象は $X_1 \sim X_n$ すべて奇数のとき.

$$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 余事象は

- 〔I〕 $X_1 \sim X_n$ すべて奇数
- 〔II〕 $X_1 \sim X_n$ の1つだけが2または6, 他は奇数.

$$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_1 = 1 - \frac{2n+3}{3 \cdot 2^n} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4) 余りだけを考えると,

$$X_1 X_2 \dots\dots X_n = 1^n, 1^{n-2} \cdot 2^2, 1^{n-4} \cdot 2^4, 1^{n-6} \cdot 2^6, \dots\dots$$

となるときが, 3で割って余りが1となるとき.

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_4 + \dots\dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots\dots + {}_nC_{n-1}) \end{aligned}$$

ここで,

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \dots\dots + {}_nC_{n-1} x^{n-1} + {}_nC_n x^n \quad \dots\dots (*)$$

であり, $x=1$ とおくと,

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots\dots + {}_nC_n \quad \dots\dots (**)$$

また, ${}_nC_0 = {}_nC_n, {}_nC_1 = {}_nC_{n-1}, \dots\dots, {}_nC_{\frac{n-1}{2}} = {}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ より,

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots\dots + {}_nC_{n-1} &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots\dots + {}_nC_{\frac{n-1}{2}} \\ &= \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

よって,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_nC_0 + {}_nC_2 + \dots\dots + {}_nC_{n-1}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

(ii) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_4 + \dots\dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n {}_nC_n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots\dots + {}_nC_n) \end{aligned}$$

ここで, (*) で $x=-1$ とおくと,

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \dots\dots - {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

これと (**) を辺々たして,

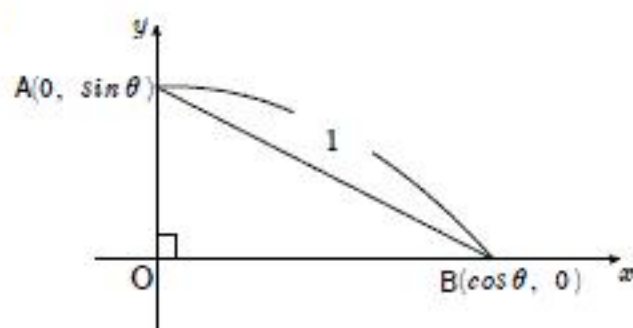
$$\begin{aligned} 2^n &= 2({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots\dots + {}_nC_n) \\ \therefore {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots\dots + {}_nC_n &= \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

よって,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_nC_0 + {}_nC_2 + \dots\dots + {}_nC_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

(i), (ii) より, いずれの場合も, 求める確率は $\frac{2^{n-1}}{3^n}$ (答)

(1)



$$A(0, \sin \theta), B(\cos \theta, 0) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく。このとき、

$$AB: y = -(\tan \theta)x + \sin \theta \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

x を $0 \leq x \leq \cos \theta$ の範囲で固定したときの y の値を $y(\theta)$ とおくと、

$$y'(\theta) = -\frac{x}{\cos^2 \theta} + \cos \theta = \frac{\cos^3 \theta - x}{\cos^2 \theta}$$

$\cos \theta = x^{\frac{1}{3}}$ となる θ を θ_0 とおくと、

$y(\theta)$ は $\theta = \theta_0$ で最大となり、そのとき

$$\begin{aligned} y(\theta_0) &= -\tan \theta_0 \cos^3 \theta_0 + \sin \theta_0 \\ &= -\sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + \sin \theta_0 \\ &= \sin \theta_0 (1 - \cos^2 \theta_0) \\ &= \sin^3 \theta_0 \\ &= (1 - \cos^2 \theta_0)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

θ	0	...	θ_0	...	$\frac{\pi}{2}$
$y'(\theta)$		+	0	-	
$y(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $A(0, 1), B(0, 0)$ であり、 y の最大値は 1、このとき、 $x = 0$ であるから、

(*) は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときも含む。

$$\therefore f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 y^2 dx &= \pi \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(1 - \frac{9}{5} + \frac{9}{7} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{16}{105} \pi \end{aligned}$$

$\dots\dots (\text{答})$

$$\sum_{i=1}^m \{a + (i-1)d\} = ma + \frac{m(m-1)}{2}d$$

よって、

$$(2l+1)nd = \sum_{i=1}^m \{a + (i-1)d\} \text{ のとき,}$$

$$(2l+1)nd = ma + \frac{m(m-1)}{2}d$$

$$2(2l+1)nd = m\{2a + (m-1)d\} \dots\dots(*)$$

したがって、(*)を満たす自然数 a, m ($m \geq 2$) が存在することを示す.

$l \geq n$ のとき、 $m = 2n$ とおけば、 $m \geq 2$ であり、このとき(*)は、

$$(2l+1)d = 2a + (2n-1)d$$

$$(2l-2n+2)d = 2a$$

$$a = (l-n+1)d \geq 1$$

したがって、(*)を満たす自然数 a, m は存在し、 $a = (l-n+1)d, m = 2n$

$l < n$ のとき、 $m = 2l+1$ とおけば、 $m \geq 2$ であり、このとき(*)は、

$$2nd = 2a + 2ld$$

$$a = (n-l)d \geq 1$$

したがって、(*)を満たす自然数 a, m は存在し、 $a = (n-l)d, m = 2l+1$

以上より、いずれの場合も与式を満たす自然数 a, m ($m \geq 2$) は存在する. $\square$