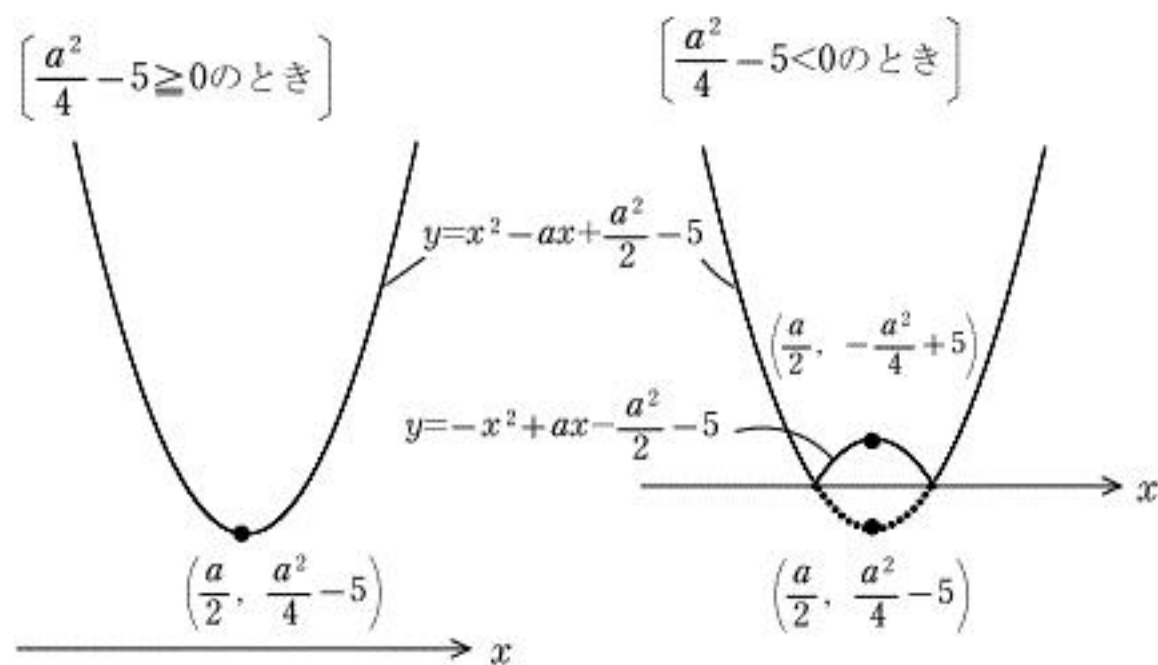


$$\boxed{1} \quad y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right| = \left| \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} - 5 \right|$$

よって、グラフは図のようになる。



- (1) 共有点が 3 個になるのは, $\frac{a^2}{4} - 5 < 0$ かつ $-\frac{a^2}{4} + 5 = b$ のとき.

よって, $(a, b) = (2, 4), (4, 1)$... (答)

- (2) 共有点が 1 個になるのは, $\frac{a^2}{4} - 5 \geq 0$ かつ $\frac{a^2}{4} - 5 = b$ のとき.

b が最小となるのは, $a = 6$ のとき, $b = 4$... (答)

$$\frac{a}{27} + \frac{31}{b} = \frac{ab + 31 \cdot 27}{27b} = m \text{ とおく.} \quad (m \text{ は自然数})$$

$$ab + 31 \cdot 27 = 27bm$$

$$ab = 27(bm - 31)$$

a と b は互いに素ゆえ, b は 27 の倍数.

$b = 27n$ (n は自然数) とおくと,

$$a \cdot 27n = 27(27n \cdot m - 31)$$

$$an = 27mn - 31$$

$$31 = n(27m - a)$$

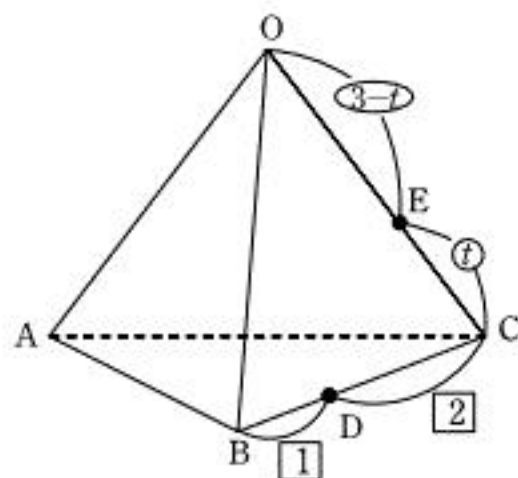
b と 31 は互いに素ゆえ, $27n$ と 31 は互いに素. ここで, n と 31 も互いに素.

よって, $27m - a$ は 31 の倍数であり, $n=1$ とわかる. $\therefore b=27$

このとき, $a = 27m - 31$

$1 \leq a \leq 100$ より, $m=2, 3, 4$ のとき, それぞれ $a=23, 50, 77$

以上より, $(a, b) = (23, 27), (50, 27), (77, 27) \dots$ (答)



$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$$

$$(1) \quad |\overrightarrow{AD}|^2 = \left| \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right|^2 = \frac{4}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ = 4 + 1 + 2 = 7$$

$$\therefore AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{7} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3-t}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{t}{3} \overrightarrow{AO} \text{ より,}$$

$$|\overrightarrow{AE}|^2 = \left| \frac{3-t}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{t}{3} \overrightarrow{AO} \right|^2 = \frac{(3-t)^2}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{t^2}{9} |\overrightarrow{AO}|^2 + \frac{2t(3-t)}{9} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} \\ = (3-t)^2 + t^2 + t(3-t) = t^2 - 3t + 9$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(\frac{3-t}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{t}{3} \overrightarrow{AO} \right) \\ = \frac{2}{9} (3-t) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{3-t}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{2t}{9} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{t}{9} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} \\ = 3 - t + 3 - t + t + \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} + 6$$

$$\therefore \cos \angle DAE = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AE}|} = \frac{-\frac{t}{2} + 6}{\sqrt{7} \sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{-t + 12}{2\sqrt{7} \sqrt{t^2 - 3t + 9}} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \triangle ADE = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 |\overrightarrow{AE}|^2 - (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE})^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{7(t^2 - 3t + 9) - \left(-\frac{t}{2} + 6\right)^2} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 7(t^2 - 3t + 9) - (-t + 12)^2} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{27t^2 - 60t + 108} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{27 \left(t - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{224}{3}}$$

$$\text{よって, } t = \frac{10}{9} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{4} \sqrt{\frac{224}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}} \text{ をとる.} \quad \dots (\text{答})$$

- (1) 3から9までのカードを並べ、前後を含め、その間に1と2のカードに入れると、1と2は隣り合わないので、求める確率は、

$$\frac{{}_7P_7 \cdot {}_8P_2}{{}_9P_9} = \frac{7}{9} \quad \dots (\text{答})$$

- (2) 8と9の間に入れるカードの選び方は7通りあり、8と9の並べ替えは2通りある。その3枚のカードをひとまとまりに考えると、残りのカードを含めた並べ方は ${}_7P_7$ 通り。よって、求める確率は、

$$\frac{7 \times 2 \times {}_7P_7}{{}_9P_9} = \frac{7}{36} \quad \dots (\text{答})$$

- (3) 8と9の間に1のカードがあるとき、1と2は隣り合わない。これは、8と9の並べ替えと、残りのカードを含めた並べ方が ${}_7P_7$ 通りあるので、 $2 \times {}_7P_7$ 通りある。8と9の間に2のカードがあるときも同様。

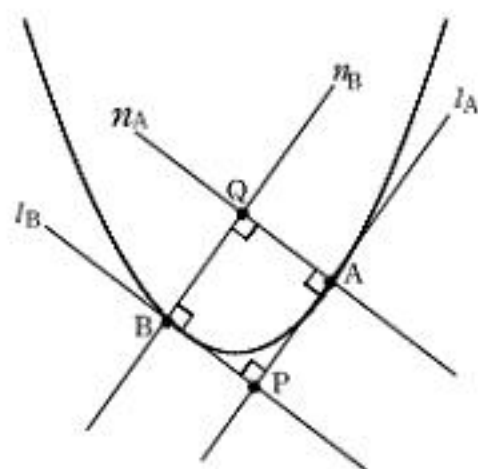
8と9の間に3から7までのどれかが入っているとき、3枚のカードをひとまとまりに考えると、1, 2を除いた残りのカードを含めた並べ方は、

$$5 \times 2 \times {}_5P_5 \quad \text{通り}$$

前後を含め、その間に1と2のカードを並べる方法は ${}_6P_2$ 通り。

よって、求める確率は、

$$\frac{2 \times {}_7P_7 \times 2 + 5 \times 2 \times {}_5P_5 \times {}_6P_2}{{}_9P_9} = \frac{13}{84} \quad \dots (\text{答})$$



$$y = \frac{x^2}{4} \text{ について, } y' = \frac{x}{2}$$

$$l_A : \begin{cases} \text{傾き } \frac{a}{2} \\ \text{通る点 } A \left(a, \frac{a^2}{4} \right) \end{cases} \text{ より, } y = \frac{a}{2}(x-a) + \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4}$$

$$l_B : a \text{ を } b \text{ に替えて, } y = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4}$$

$$n_A : \begin{cases} \text{傾き } -\frac{a}{2} \\ \text{通る点 } A \left(a, \frac{a^2}{4} \right) \end{cases} \text{ より, } y = -\frac{2}{a}(x-a) + \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore y = -\frac{2}{a}x + 2 + \frac{a^2}{4}$$

$$n_B : a \text{ を } b \text{ に替えて, } y = -\frac{2}{b}x + 2 + \frac{b^2}{4}$$

$$(1) \quad l_A \perp l_B \text{ のとき, } \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = -1 \quad \therefore b = -\frac{4}{a} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} \\ y = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4} \end{cases} \text{ を連立して解いて, } \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{ab}{4} \end{cases} \quad \therefore P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{4}\right) \quad \dots (\text{答})$$

$Q(p, q)$ とすると, 四角形 AQBP は長方形より, (AB の中点) = (PQ の中点)

$$\therefore \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{p+\frac{a+b}{2}}{2} \\ \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}{2} = \frac{q + \frac{ab}{4}}{2} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = \frac{a+b}{2} \\ q = \frac{a^2 + b^2 - ab}{4} \end{cases} \quad \therefore Q\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2 + b^2 - ab}{4}\right) \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad (\text{長方形 AQBP}) = AP \cdot BP = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left[\frac{a(a-b)}{4}\right]^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left[\frac{b(a-b)}{4}\right]^2}$$

$$= \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 \sqrt{(4+a^2)(4+b^2)} = \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 \sqrt{4(a-b)^2 + 8ab + 16 + a^2b^2}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{16} \sqrt{4(a-b)^2 - 32 + 16 + (-4)^2} = \frac{1}{8}(a-b)^3$$

よって, $a-b = a + \frac{4}{a}$ が最小のとき, 面積は最小となる.

相加平均・相乗平均の関係より,

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 \quad (\text{等号成立は } a = \frac{4}{a}, \text{ すなわち, } a = 2 \text{ のとき})$$

よって, $a = 2$ のとき, 最小値 $\frac{1}{8} \cdot 4^3 = 8$ をとる. $\dots (\text{答})$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad {}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right) &= \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} \left(\frac{n!k!}{(n+k)!} - \frac{(n+1)!k!}{(n+k+1)!} \right) \\
 &= \frac{(n+k+1) \cdot (n+k)!}{n!(k+1)! \cdot k!} \left(\frac{n!k!}{(n+k)!} - \frac{(n+1) \cdot n!k!}{(n+k+1) \cdot (n+k)!} \right) \\
 &= \frac{n+k+1}{k+1} \left(1 - \frac{n+1}{n+k+1} \right) = \frac{n+k+1}{k+1} \cdot \frac{k}{n+k+1} = \frac{k}{k+1} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

これは、 n によらない値である。

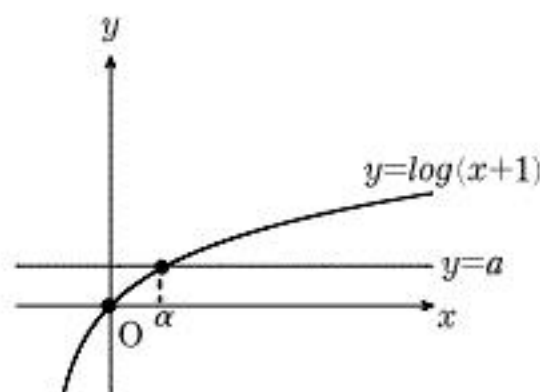
(2) (1)で $k=2$ のとき、

$${}_{n+3}C_3 \times \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right) = \frac{2}{3} \quad \therefore \frac{1}{{}_{n+3}C_3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right)$$

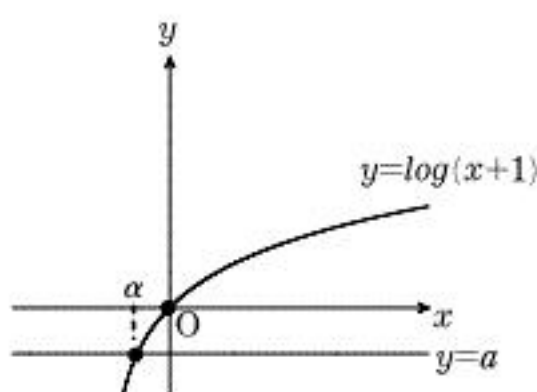
よって、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}C_3} &= \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2C_2} - \cancel{\frac{1}{{}_3C_2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{{}_3C_2}} - \cancel{\frac{1}{{}_4C_2}} \right) \times \dots \times \left(\cancel{\frac{1}{{}_{m-1}C_2}} - \frac{1}{{}_mC_2} \right) \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_2C_2} - \frac{1}{{}_mC_2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{(m-2)!2!}{m!} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{m! - 2(m-2)!}{m!} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{m(m-1) - 2}{m(m-1)} = \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$y=a$ と $y=\log(x+1)$ のグラフは図のようになるので、



($a>0$ のとき)



($a<0$ のとき)

共有点の x 座標を α とおくと、

$a>0$ のとき、 $0<x<\alpha$ で、 $a>\log(x+1)$

$a<0$ のとき、 $\alpha<x<0$ で、 $a<\log(x+1)$

$y=ax$ と $y=x\log(x+1)$ の共有点の x 座標は、 0 と α であるから、

$a>0$ のとき、 $0<x<\alpha$ で、 $ax>x\log(x+1)$ となるので、求める面積 S は、

$$S = \int_0^{\alpha} \{ax - x\log(x+1)\} dx$$

$a<0$ のとき、 $\alpha<x<0$ で、 $ax>x\log(x+1)$ となるので、求める面積 S は、

$$S = \int_{\alpha}^0 \{ax - x\log(x+1)\} dx$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} x\log(x+1) dx &= \int_1^{\alpha+1} (t-1)\log t dt \\ &= \int_1^{\alpha+1} t\log t dt - \int_1^{\alpha+1} \log t dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 \log t \right]_1^{\alpha+1} - \int_1^{\alpha+1} \frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{t} dt - [t\log t - t]_1^{\alpha+1} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+1)^2 \log(\alpha+1) - \frac{1}{4}[t^2]_1^{\alpha+1} - \{(\alpha+1)\log(\alpha+1) - (\alpha+1)\} + (-1) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+1)^2 \log(\alpha+1) - \frac{1}{4}(\alpha+1)^2 + \frac{1}{4} - (\alpha+1)\log(\alpha+1) + (\alpha+1) - 1 \\ &= \frac{\alpha^2-1}{2} \log(\alpha+1) - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} x+1=t \text{ とおく.} \\ dx=dt \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \alpha \\ \hline t & 1 \rightarrow \alpha+1 \end{array} \end{array} \right)$$

よって、

$a>0$ のとき、

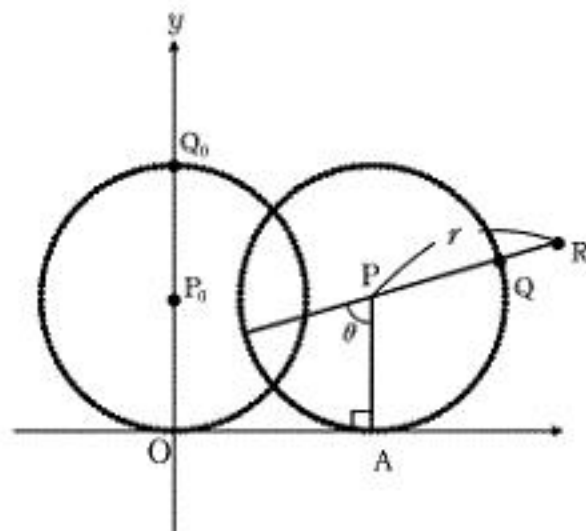
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha} \{ax - x\log(x+1)\} dx = \frac{a}{2}[x]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} x\log(x+1) dx \\ &= \frac{a}{2}\alpha^2 - \frac{\alpha^2-1}{2} \log(\alpha+1) + \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

ここで、 $a=\log(\alpha+1)$ より、 $\alpha+1=e^a$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{a}{2}(e^a-1)^2 - \frac{(e^a-1)^2-1}{2} \cdot a + \frac{1}{4}(e^a-1)^2 - \frac{1}{2}(e^a-1) \\ &= \frac{1}{4}e^{2a} - e^a + \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$a<0$ のとき、

$$S = \int_{\alpha}^0 \{ax - x\log(x+1)\} dx = -\frac{1}{4}e^{2a} + e^a - \frac{a}{2} - \frac{3}{4} \quad \dots (\text{答})$$



円 C と x 軸との接点を A とする.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$= \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \theta + \sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + r \sin\theta \\ 1 + r \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha + r \sin \alpha = \beta + r \sin \beta \\ 1 + r \cos \alpha = 1 + r \cos \beta \end{cases} \quad \text{のとき,} \quad \begin{cases} r(\sin \alpha - \sin \beta) = \beta - \alpha & \dots \textcircled{1} \\ \cos \alpha = \cos \beta & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ と } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \text{ より, } \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi$$

$$\text{また, } \textcircled{1} \text{ より, } 2r \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta - \alpha \quad \therefore -r \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\text{よって, } -r \cos \pi \sin t = t \quad r = \frac{t}{\sin t} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = \theta + r \sin \theta \\ y = 1 + r \cos \theta \end{cases} \quad \text{について,} \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = 1 + r \cos \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = -r \sin \theta \end{cases}$$

θ	0	...	θ_1	...	π	...	θ_2	...	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$\frac{dy}{d\theta}$	0	-	-	-	0	+	+	+	0
グラフ	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$

$$1 + r \cos \theta = 0, \text{ すなわち, } \cos \theta = -\frac{1}{r} \text{ をみたす } \theta \text{ を}$$

$$\theta_1, \theta_2 \left(\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi \right) \text{ とおくと,}$$

増減表は図のようになる.

$$S = \int_{x=\theta_2+r\sin\theta_2}^{x=\theta_1+r\sin\theta_1} y dx$$

$$S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\theta_1} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\theta=\theta_2}^{\theta=\beta} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\theta=\theta_2}^{\theta=\theta_1} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\theta_1} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta + \int_{\theta=\theta_2}^{\theta=\beta} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} y(\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (1 + r \cos \theta) \cdot (1 + r \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (1 + 2r \cos \theta + r^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta$$

$$= \left[\left(1 + \frac{r^2}{2} \right) \theta + 2r \sin \theta + \frac{r^2}{4} \sin 2\theta \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \frac{2 + r^2}{2} (\beta - \alpha) + 2r (\sin \beta - \sin \alpha) + \frac{r^2}{4} (\sin 2\beta - \sin 2\alpha)$$

$$= (2 + r^2) \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} + 2r \cdot 2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{r^2}{2} \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)$$

$$= (2 + r^2) \cdot t + 4r \cos \pi \sin t + \frac{r^2}{2} \cos 2\pi \sin 2t$$

$$= (2 + r^2) t - 4r \sin t + \frac{r^2}{2} \sin 2t$$

$$= 2t - 4 \sin t \cdot \frac{t}{\sin t} + \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \cdot \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2$$

$$= -2t + \frac{t^3}{\sin^2 t} + \frac{t^2 \cos t}{\sin t} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(3) \quad r = \frac{t}{\sin t} \text{ であり, } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \text{ より, } 0 < \frac{\beta - \alpha}{2} \leq \pi \text{ であるから,}$$

$$0 < t \leq \pi$$

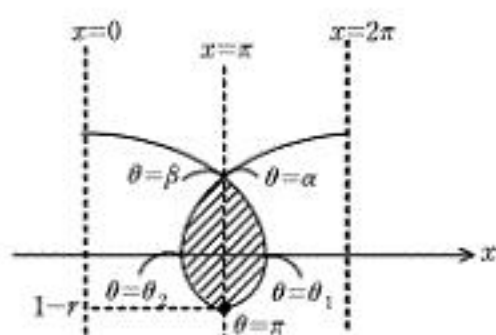
よって, $r \rightarrow \infty$ のとき, $t \rightarrow \pi - 0$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2} = \lim_{t \rightarrow \pi - 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} S = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2(\pi - \theta)}{(\pi - \theta)^2} S \quad (\pi - t = \theta \text{ とおいた})$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \theta}{(\pi - \theta)^2} \left[-2(\pi - \theta) + \frac{(\pi - \theta)^3}{\sin^2(\pi - \theta)} + \frac{(\pi - \theta)^2 \cos(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta)} \right]$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \theta}{(\pi - \theta)^2} \left[-2(\pi - \theta) + \frac{(\pi - \theta)^3}{\sin^2 \theta} - \frac{(\pi - \theta)^2 \cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{-2 \sin^2 \theta}{\pi - \theta} + \pi - \theta - \sin \theta \cos \theta \right) = \pi \quad \dots \text{ (答)}$$



[illegible]

よって, $\frac{16(m^4 + 14m^2)}{2m + 1} = 8m^3 - 4m^2 + 114m - 57 + \frac{57}{2m + 1}$

ここで、 $m^4 + 14m^2$ が $2m+1$ の整数倍となるとき、 $16(m^4 + 14m^2)$ も $2m+1$ の整数倍と

なるので, $\frac{57}{2m+1} = \frac{3 \cdot 19}{2m+1}$ が整数であることが必要.

$$\therefore 2m+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 19, \pm 57$$

$$2m = 0, -2, 2, -4, 18, -20, 56, -58$$

$$m=0, -1, 1, -2, 9, -10, 28, -29$$

逆にこのとき, $\frac{m^4+14m^2}{2m+1}$ をそれぞれ $0, -15, 5, -24, 9^2 \cdot 5, -10^2 \cdot 6, 28^2 \cdot 14, -29^2 \cdot 15$ となり

確かに、 $m^4 + 14m^2$ が $2m + 1$ の整数倍となる.

$$\therefore m=0, \pm 1, -2, 9, -10, 28, -29 \quad \dots \text{ (答)}$$

$\tan 10^\circ = t$ とおく.

$$\tan 30^\circ = \tan(10^\circ + 20^\circ) = \frac{\tan 10^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 20^\circ} = \frac{t + \frac{2t}{1-t^2}}{1 - t \cdot \frac{2t}{1-t^2}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ = \tan(30^\circ - 10^\circ) \cdot \tan(30^\circ + 10^\circ) = \frac{\tan 30^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 10^\circ} \cdot \frac{\tan 30^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 10^\circ}$$

$$= \frac{\tan^2 30^\circ - \tan^2 10^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ \tan^2 10^\circ} = \frac{\frac{1}{3} - t^2}{1 - \frac{1}{3}t^2} = \frac{1 - 3t^2}{3 - t^2}$$

よって,

$$\tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \cdot \frac{1 - 3t^2}{3 - t^2} = t = \tan 10^\circ \quad \square$$