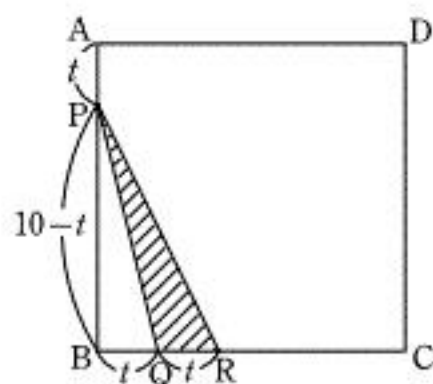


(i) $0 \leq t \leq 5$ のとき

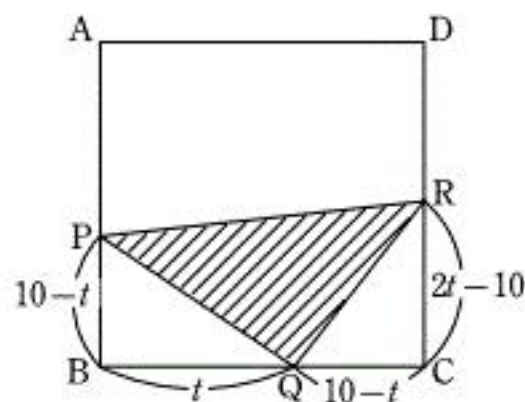


$$\Delta PQR = \frac{t(10-t)}{2}$$

$$\text{よって, } \frac{t(10-t)}{2} = 35 \text{ のとき, } t^2 - 10t + 70 = 0$$

これをみたす実数 t は存在しない。

(ii) $5 \leq t \leq 10$ のとき



$$\Delta PQR = \text{台形PBCR} - \Delta PBQ - \Delta RQC$$

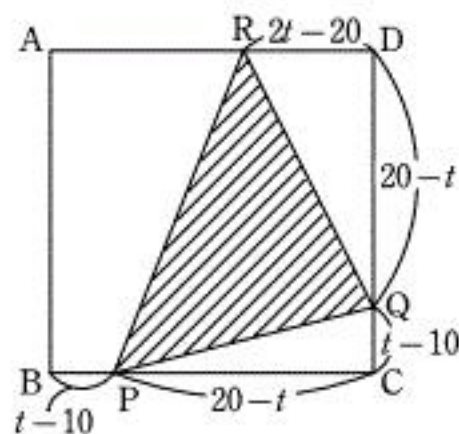
$$= \frac{(10-t) + (2t-10)}{2} \times 10 - \frac{t(10-t)}{2} - \frac{(2t-10)(10-t)}{2}$$

$$= \frac{3t^2 - 30t + 100}{2}$$

$$\text{よって, } \frac{3t^2 - 30t + 100}{2} = 35 \text{ のとき, } t = 5 \pm \sqrt{15}$$

$$5 \leq t \leq 10 \text{ より, } t = 5 + \sqrt{15}$$

(iii) $10 \leq t \leq 15$ のとき



$$\Delta PQR = \text{台形RPCD} - \Delta PCQ - \Delta RDQ$$

$$= \frac{(2t-20) + (20-t)}{2} \times 10 - \frac{(20-t)(t-10)}{2} - \frac{(2t-20)(20-t)}{2}$$

$$= \frac{3t^2 - 80t + 600}{2}$$

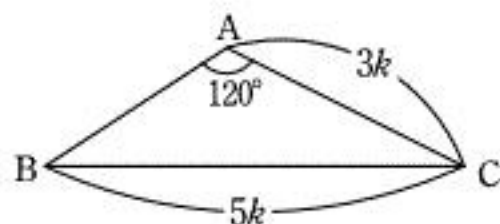
$$\text{よって, } \frac{3t^2 - 80t + 600}{2} = 35 \text{ のとき } t = \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$10 \leq t \leq 15 \text{ より, } t = \frac{40 + \sqrt{10}}{3}$$

(i) (ii) (iii)より, $t = 5 + \sqrt{15}, \frac{40 + \sqrt{10}}{3}$ (答)

正弦定理より、 $BC:CA=5:3$ 。よって、最も大きな角は A または C

(i) $A=120^\circ$ のとき、 $BC=5k$, $CA=3k$ とおくと、余弦定理より、



$$AB^2 + (3k)^2 - 2 \cdot AB \cdot 3k \cdot \cos 120^\circ = (5k)^2$$

$$AB^2 + 3kAB - 16k^2 = 0$$

$$AB = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2} k$$

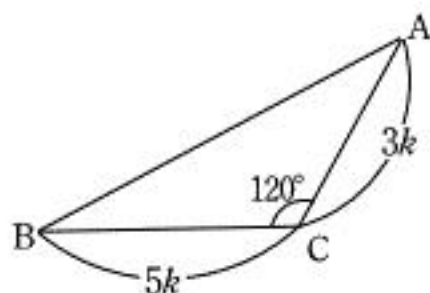
$$AB > 0 \text{ より, } AB = \frac{-3 + \sqrt{73}}{2} k$$

このとき、余弦定理より

$$\cos B = \frac{(5k)^2 + \left(\frac{-3 + \sqrt{73}}{2} k\right)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 5k \cdot \frac{-3 + \sqrt{73}}{2} k} = \frac{\sqrt{73}}{10}$$

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - \left(\frac{-3 + \sqrt{73}}{2} k\right)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = \frac{9 + \sqrt{73}}{20}$$

(ii) $C=120^\circ$ のとき、 $BC=5k$, $CA=3k$ ($k > 0$) とおくと、余弦定理より、



$$AB^2 = (5k)^2 + (3k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 3k \cdot \cos 120^\circ$$

$$AB^2 = 49k^2$$

$$\text{ゆえに } AB = 7k$$

このとき、余弦定理より

$$\cos A = \frac{(7k)^2 + (3k)^2 - (5k)^2}{2 \cdot 7k \cdot 3k} = \frac{11}{14}, \quad \cos B = \frac{(7k)^2 + (5k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 7k \cdot 5k} = \frac{13}{14}$$

以上(i) (ii)より、 $(\cos A, \cos B, \cos C) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{73}}{10}, \frac{9 + \sqrt{73}}{20}\right), \left(\frac{11}{14}, \frac{13}{14}, -\frac{1}{2}\right)$ (答)

- (1) $p+1, p+3, p+5$ は連続する偶数ゆえ、少なくともどれか1つは4の倍数。
よってそれが4で割り切れ、他の2つは2で割り切れるので、 N は16の倍数。

また、 $\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \frac{p+5}{2}$ は連続する整数ゆえ、どれか1つだけ3の倍数となる。

よってそれが3で割り切れるので N は3の倍数。

以上より、 N は48の倍数。

(証明終)

- (2) $144 = 48 \cdot 3$
したがって、(1)でさらに3で割り切れるときを考えればよい。

$\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \frac{p+5}{2}$ はどれか1つだけ3の倍数であるから、どれか1つだけが9の倍数となるときを考える。

$\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \frac{p+5}{2}$ のどれか1つが9の倍数、すなわち、 $p+1, p+3, p+5$ のどれか1つが18の倍数であるとき、 $p, p+2, p+4$ のどれか1つが(18の倍数)-1より、

$$\begin{aligned} (p, p+2, p+4) = & (13, 15, 17), (\overline{15, 17, 19}), (17, 19, 21), \\ & (31, 33, 35), (\overline{33, 35, 37}), (\overline{35, 37, 39}), \\ & (\overline{49, 51, 53}), (\overline{51, 53, 55}), (53, 55, 57), \\ & (67, 69, 71), \dots \end{aligned}$$

($\overline{}$ は p が素数であることに反する)

よって、 p は小さい順に 13, 17, 31, 53, 67 (答)

- (1) 取り出し方は $4! \times 4!$ 通り、

4 引き分けとなるには、 A と B が同じカードを取り出すことを 4 回繰り返したときなので、

$$\frac{4!}{4! \times 4!} = \frac{1}{24} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2) 2 引き分けとなる回の選び方は ${}_4C_2$ 通り、そこで出るカードの選び方は ${}_4P_2$ 通り、

残りの 2 回のカードの並べ方は ${}_2P_2$ 通り、 B は A と異なるものを出すので 1 通り、

よって、

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_4P_2 \times {}_2P_2}{4! \times 4!} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3) 3 引き分けのとき、自動的に残り 1 回も引き分けとなるので存在しない、

1 引き分けのとき、残りの 3 回は 2 勝 1 敗もしくは 1 勝 2 敗となり勝負がつく、

0 引き分けのとき、必ずどちらかが 2 勝するので、勝負がつく、

A と B が対等であることに注意して、 A が勝者となる確率は、

$$\frac{1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{48} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1) 赤玉が出る確率は $\frac{3}{10}$, 白玉が出る確率は $\frac{7}{10}$. N 回のうち A 回赤玉出ることより,

$$p(N, A) = \frac{{}_N C_A \left(\frac{3}{10}\right)^A \left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}}{\dots\dots} \quad (\text{答})$$

(2) (i)

$$\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a} \quad (a \text{ は } 0 \text{ 以上の整数, } b \text{ は自然数}) \quad \dots\dots(*)$$

を示す.

$a=b$ のとき, $1 \leq 1$ となり, 明らかに成り立つ.

$a < b$ のとき, $a+1, a+2, \dots, b-1 \leq b$ より,

$$(a+1)(a+2)\dots(b-1)b \leq b \cdot b \cdot \dots \cdot b \cdot b$$

$$\text{したがって, } \frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$$

$a > b$ のとき, $b \leq b+1, b+2, \dots, a-1, a$ より,

$$b \cdot b \cdot \dots \cdot b \cdot b \leq (b+1)(b+2)\dots(a-1)a$$

$$\text{したがって, } b^{a-b} \leq \frac{a!}{b!}$$

$$\text{すなわち, } \frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$$

よって, いずれの場合も(*)は成り立つ.

(ii)

$$\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上 } 10n \text{ 以下の整数}) \quad \dots\dots(**)$$

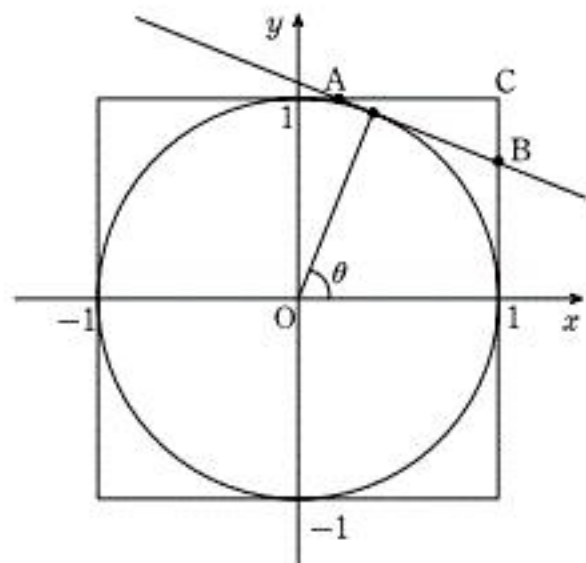
を示す.

$$\begin{aligned} \frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} &= \frac{{}_{10n} C_m \left(\frac{3}{10}\right)^m \left(\frac{7}{10}\right)^{10n-m}}{{}_{10n} C_{3n} \left(\frac{3}{10}\right)^{3n} \left(\frac{7}{10}\right)^{7n}} \\ &= \frac{(10n)!}{m!(10n-m)!} \cdot \frac{3^m \cdot 7^{10n-m}}{10^{10n}} = \frac{(3n)!(7n)!}{m!(10n-m)!} \cdot \frac{7^{3n-m}}{3^{3n-m}} \\ &= \frac{(3n)!(7n)!}{(3n)!(7n)!} \cdot \frac{(7n)^{3n-m}}{3^{3n-m}} \leq (3n)^{3n-m} \cdot (7n)^{7n-(10n-m)} \cdot \frac{(7n)^{3n-m}}{(3n)^{3n-m}} \quad ((*) \text{より}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって (**)より, $p(10n, 0), p(10n, 1), \dots, p(10n, 10n)$ の中で 1 番大きな値は

$p(10n, 3n)$ である.

(証明終)



接線の方程式は $\cos \theta x + \sin \theta y = 1$

$$y=1 \text{ のとき, } x = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$x=1 \text{ のとき, } y = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{よって, } A\left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}, 1\right), B\left(1, \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}\right), C(1, 1)$$

とおくと,

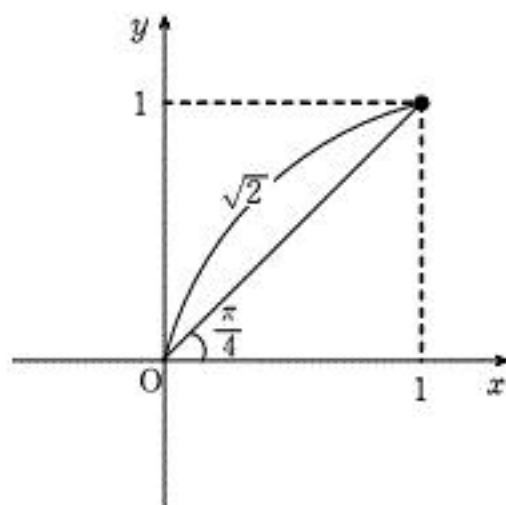
$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= \sqrt{\left(1 - \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} + \left(1 - \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}\right) + \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}\right) \\ &= \sqrt{\frac{(\cos \theta + \sin \theta - 1)^2}{\cos^2 \theta} + \frac{(\sin \theta + \cos \theta - 1)^2}{\sin^2 \theta}} + \frac{\cos \theta + \sin \theta - 1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta} \\ &= \sqrt{\frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin \theta + \cos \theta - 1)^2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}} \\ &= \frac{|\sin \theta + \cos \theta - 1|}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta + 1 - \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

ここで, $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ であり, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $1 < \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$

よって,

$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta + 1 - \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$

(証明終)



また,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin \theta + \cos \theta - 1)^2}{\sin \theta \cos \theta}$$

$\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと, $1 < t \leq \sqrt{2}$ より,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t-1)^2}{\frac{t^2-1}{2}} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1} \leq 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

等号成立は $t = \sqrt{2}$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき,

よって三角形の面積を最大にするのは $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときだと求められる. (答)

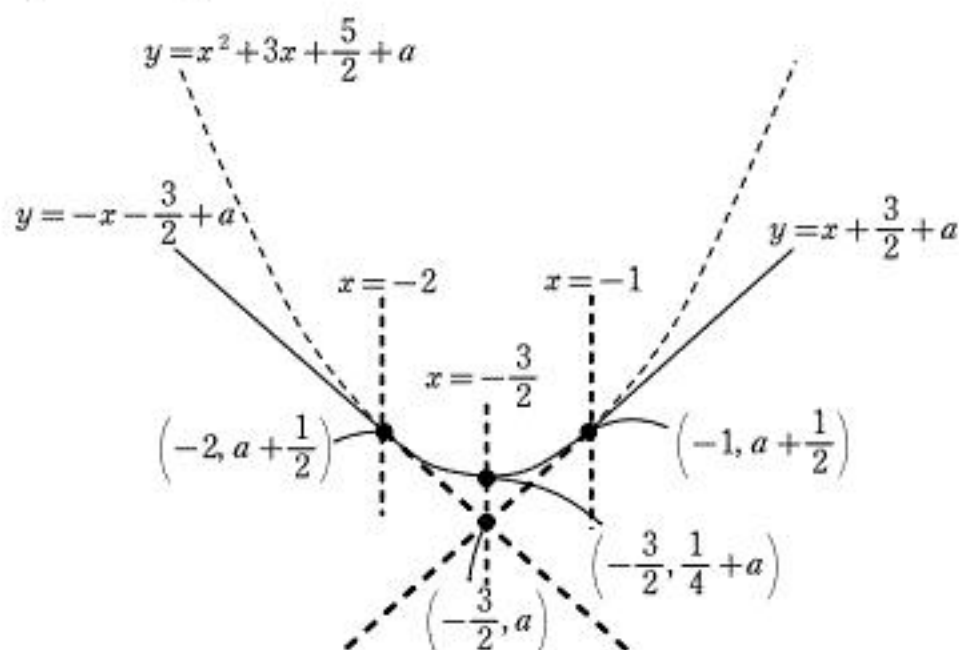
$$(i) \ x \geq -1 \text{ のとき, } f(x) = \int_x^{x+1} (t+1) dt + a = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_x^{x+1} + a = x + \frac{3}{2} + a$$

$$(ii) \ x+1 \leq -1 \text{ のとき, } f(x) = -\int_x^{x+1} (t+1) dt + a = -\left[\frac{t^2}{2} + t \right]_x^{x+1} + a = -x - \frac{3}{2} + a$$

$$(iii) \ x \leq -1 \leq x+1 \text{ のとき, } f(x) = -\int_x^{-1} (t+1) dt + \int_{-1}^{x+1} (t+1) dt + a \\ = -\left[\frac{t^2}{2} + t \right]_x^{-1} + \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^{x+1} + a = x^2 + 3x + \frac{5}{2} + a$$

よって,

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} + a & (x \geq -1) \\ -x - \frac{3}{2} + a & (x \leq -2) \\ x^2 + 3x + \frac{5}{2} + a & (-2 \leq x \leq -1) \end{cases}$$

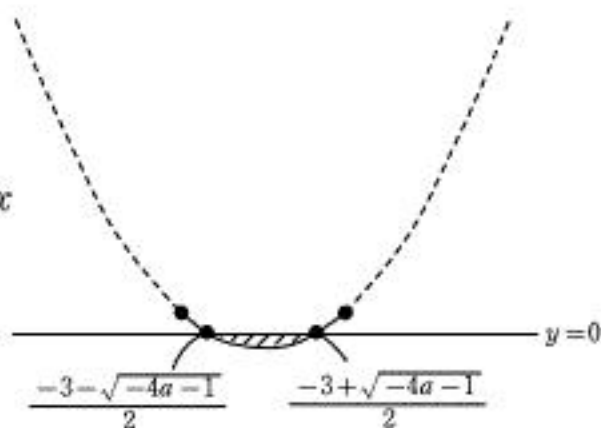


したがって, $y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点をもつには, $\frac{1}{4} + a < 0$

すなわち, $a < -\frac{1}{4}$ (答)

(iv) $a + \frac{1}{4} < 0 < a + \frac{1}{2}$ のとき, 囲まれる部分の面積は

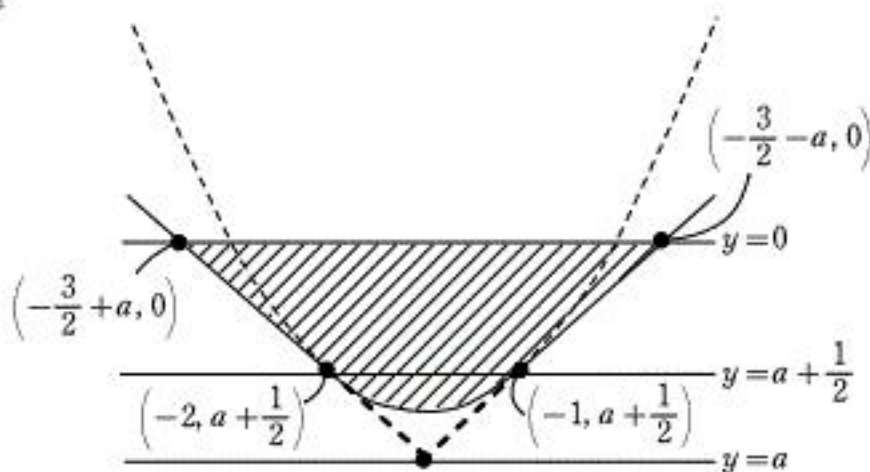
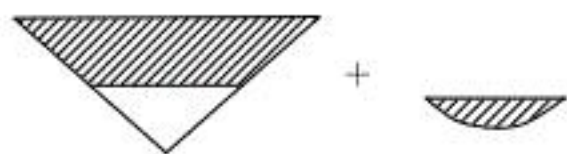
$$\int_{\frac{-3-\sqrt{-4a-1}}{2}}^{\frac{-3+\sqrt{-4a-1}}{2}} \left\{ 0 - \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2} + a \right) \right\} dx \\ = -\int_{\frac{-3-\sqrt{-4a-1}}{2}}^{\frac{-3+\sqrt{-4a-1}}{2}} \left(x - \frac{-3-\sqrt{-4a-1}}{2} \right) \left(x - \frac{-3+\sqrt{-4a-1}}{2} \right) dx \\ = \frac{1}{6} \left(\frac{-3+\sqrt{-4a-1}}{2} - \frac{-3-\sqrt{-4a-1}}{2} \right)^3 \\ = \frac{1}{6} (\sqrt{-4a-1})^3$$



(v) $0 \leq a + \frac{1}{2}$ のとき, 囲まれる面積は右図で

三角形の相似と面積比 = (相似比)² を

利用して,



$$= \left[\left(-\frac{3}{2} - a \right) - \left(-\frac{3}{2} + a \right) \right] \times (-a) \times \frac{1}{2} \times \frac{\left| -a \right|^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2}{\left| -a \right|^2} + \int_{-2}^{-1} \left[\left(a + \frac{1}{2} \right) - \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2} + a \right) \right] dx \\ = a^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \{ -1 - (-2) \}^3 = a^2 - \frac{1}{12}$$

したがって,

$$\begin{cases} \frac{1}{6} (\sqrt{-4a-1})^3 & \left(-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4} \right) \\ a^2 - \frac{1}{12} & \left(a \leq -\frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{..... (答)}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 I_{n,m} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \theta \cdot \cos \theta \sin^m \theta \, d\theta \\
 &= \left[\cos^{n-1} \theta \cdot \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} \theta \cdot (-\sin \theta) \cdot \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} \theta \, d\theta \\
 &= \frac{n-1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \theta \sin^{m+2} \theta \, d\theta = \frac{n-1}{m+1} I_{n-2, m+2} \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) $\cos^2 \theta = x$ とおくと, $2 \cos \theta \cdot (-\sin \theta) \, d\theta = dx$

$$\text{ゆえに, } \cos \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{1}{2} dx \qquad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x & 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

このとき,

$$I_{2n+1, 2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \sin^{2m} \theta \cdot \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \int_1^0 x^n (1-x)^m \cdot \left(-\frac{1}{2} dx\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx$$

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1, 2m+1} &= \frac{2n}{2m+2} I_{2n-1, 2m+3} = \frac{2n}{2m+2} \cdot \frac{2n-2}{2m+4} I_{2n-3, 2m+5} = \frac{2n}{2m+2} \cdot \frac{2n-2}{2m+4} \cdot \frac{2n-4}{2m+6} I_{2n-5, 2m+7} \dots\dots \\
 \dots\dots &= \frac{2n}{2m+2} \cdot \frac{2n-2}{2m+4} \cdot \frac{2n-4}{2m+6} \cdot \dots\dots \cdot \frac{2}{2m+2n} I_{1, 2m+2n+1} \\
 &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \frac{n-2}{m+3} \cdot \dots\dots \cdot \frac{1}{m+2} I_{1, 2m+2n+1} \\
 &= \frac{n!m!}{(m+n)!} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 x^0 (1-x)^{m+n} \, dx \\
 &= \frac{n!m!}{2(m+n)!} \left[\frac{-1}{m+n+1} (1-x)^{m+n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{n!m!}{2(n+m+1)!} \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1, 2m+1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n \{1 - {}_m C_1 x + {}_m C_2 x^2 - \dots\dots + (-1)^m {}_m C_m x^m\} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{x^n - {}_m C_1 x^{n+1} + {}_m C_2 x^{n+2} - \dots\dots + (-1)^m {}_m C_m x^{m+n}\} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{{}_m C_1}{n+2} x^{n+2} + \frac{{}_m C_2}{n+3} x^{n+3} - \dots\dots + \frac{(-1)^m {}_m C_m}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{{}_m C_0}{n+1} - \frac{{}_m C_1}{n+2} + \frac{{}_m C_2}{n+3} - \dots\dots + (-1)^m \frac{{}_m C_m}{m+n+1} \right] \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, } \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{{}_m C_0}{n+1} - \frac{{}_m C_1}{n+2} + \frac{{}_m C_2}{n+3} - \dots\dots + (-1)^m \frac{{}_m C_m}{m+n+1}$$

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} (\sin 2x - 2 \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} (2 \sin x \cos x - 2 \cos x) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot 2 \cos x (\sin x - 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 e^t \cdot 2(t-1) dt \quad \left(\begin{array}{l} \sin x = t \text{ とおく.} \\ \cos x dx = dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -1 \rightarrow 1 \end{array} \right) \\
 &= [2(t-1)e^t]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^t dt \\
 &= 0 + \frac{4}{e} - [2e^t]_{-1}^1 = \underline{\underline{\frac{6}{e} - 2e}} \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (\sin 2x - 2 \cos x) + e^{\sin x} \cdot (2 \cos 2x + 2 \sin x) \\
 &= e^{\sin x} (\cos x \sin 2x - 2 \cos^2 x + 2 \cos 2x + 2 \sin x) \\
 &= e^{\sin x} \{ \cos x \cdot 2 \sin x \cos x - 2(1 - \sin^2 x) + 2(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x \} \\
 &= 2e^{\sin x} \{ (1 - \sin^2 x) \sin x - (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x \} \\
 &= 2e^{\sin x} \sin x (1 - \sin x) (2 + \sin x)
 \end{aligned}$$

$0 \leq x < 2\pi$ において、 $1 - \sin x \geq 0$ 、 $2 + \sin x \geq 0$ より、
増減表は右のようになる。よって $f(x)$ の最大値は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	(0)	+	0	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f(x) = \underline{\underline{2}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

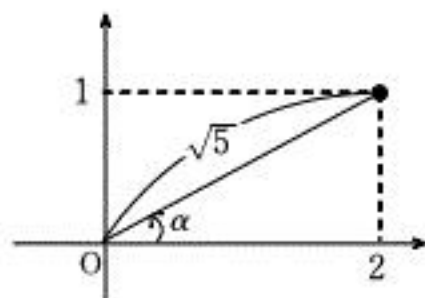
(3) $g(x) = (x^2 + 2x - 2)e^x$ とおくと、 $g'(x) = (x^2 + 4x)e^x$

よって、 $x \geq 0$ のとき、 $g'(x) \geq 0$ となるので、 $g(x)$ は単調増加。

$x \geq 0$ のとき、 $x \geq \sin x$ であるから、 $g(x) \geq g(\sin x)$

ここで、

$$\begin{aligned}
 g(\sin x) - f(x) &= (\sin^2 x + 2 \sin x - 2 - \sin 2x + 2 \cos x) e^{\sin x} \\
 &= (1 - \cos^2 x + 2 \sin x - 2 - 2 \sin x \cos x + 2 \cos x) e^{\sin x} \\
 &= (1 - \cos x)(1 + \cos x - 2 + 2 \sin x) e^{\sin x} \\
 &= (1 - \cos x) \{ \sqrt{5} \sin(x + \alpha) - 1 \} e^{\sin x} \\
 &\quad (\alpha \text{ は図のような角})
 \end{aligned}$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sqrt{5} \sin(x + \alpha) - 1 \geq 0$ であるから、 $g(\sin x) \geq f(x)$

$$\text{また、} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi - 2\right)e^{\frac{\pi}{2}} > 3e^1 > (1+1)e^1 \geq (\sin 2x - 2 \cos x)e^{\sin x} = f(x)$$

であるから、 $x \geq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $g(x) \geq f(x)$

以上より、 $x \geq 0$ において、 $g(x) \geq f(x)$

(証明終)

- (1) $g(x) = f(x)f(1-x)$ とおくと, $g(1-x) = g(x)$ より, $y = g(x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}$ に関して対称.

$$\log g(x) = \log x^x (1-x)^{1-x} = x \log x + (1-x) \log(1-x) \text{ より,}$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + 1 - \log(1-x) - 1 = \log \frac{x}{1-x}$$

$$\text{ゆえに, } g'(x) = \log \frac{x}{1-x} g(x)$$

増減表より, $f(x)f(1-x)$ の最大値は $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ のとき

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{4} = \frac{\sqrt[4]{27}}{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

最小値は $x = \frac{1}{2}$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

x	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$			$-$	0	$+$
$g(x)$			$\searrow$		$\nearrow$

- (2) $h(x) = \frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とおくと, $h(1-x) = h(x)$ より,

$y = h(x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}$ に関して対称

$$\text{また, } h(x) = \frac{x^x (1-x)^{1-x} a^a}{(ax)^{ax} (a(1-x))^{a(1-x)}} = \frac{g(x) a^a}{a^{ax+a(1-x)} \cdot x^{ax} (1-x)^{a(1-x)}} = \frac{g(x)}{\{g(x)\}^a} = \{g(x)\}^{1-a}$$

よって, $1-a \geq 0$, すなわち $a \leq 1$ のとき, $h(x)$ は $g(x)$ が最小のとき最小となり,

$1-a < 0$, すなわち $a > 1$ のとき, $h(x)$ は $g(x)$ が最大のとき最小となる.

$$\text{したがって, } \min h(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} & (0 < a \leq 1) \\ \left(\frac{\sqrt[4]{27}}{4}\right)^{1-a} & (a > 1) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1) $e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} = f(t)$ とおく.

$f'(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$

$f''(t) = e^t - 1 - t$

$f'''(t) = e^t - 1$

t	0	...
$f'''(t)$		+
$f''(t)$	0	↗

増減表より、 $t > 0$ のとき、 $f''(t)$ は単調増加
また、 $f''(0) = 0$ より、 $t > 0$ のとき、 $f''(t) > 0$

t	0	...
$f''(t)$		+
$f'(t)$	0	↗

増減表より、 $t > 0$ のとき、 $f'(t)$ は単調増加
また、 $f'(0) = 0$ より、 $t > 0$ のとき、 $f'(t) > 0$

t	0	...
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	↗

増減表より、 $t > 0$ のとき、 $f(t)$ は単調増加
また、 $f(0) = 0$ より、 $t > 0$ のとき、 $f(t) > 0$

以上より、 $t > 0$ のとき、 $e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$ (証明終)

(2) $g(x) = xe^x$ とおくと、 $g'(x) = (1+x)e^x$ より、 $x = t$ における接線の方程式は
 $y - te^t = (1+t)e^t(x-t)$

これが $(0, a)$ を通るとき、 $a = -t^2e^t$ (*)

$h(t) = -t^2e^t$ とおくと、 $h'(t) = -(t^2 + 2t)e^t$ より、
増減表は右のようになる.

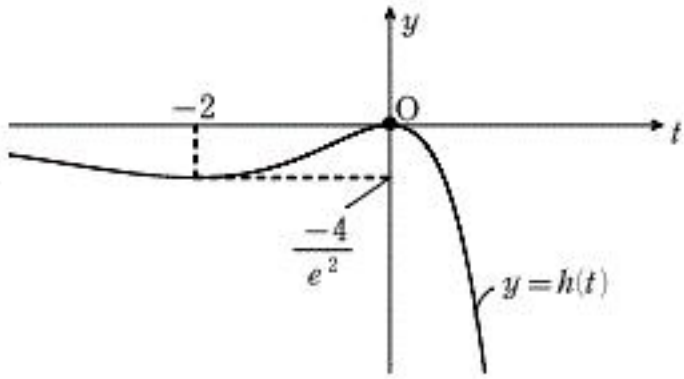
t	...	-2	...	0	...
$h'(t)$	-	0	+	0	-
$h(t)$	↘	$-\frac{4}{e^2}$	↗	0	↘

$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -\infty$ より、

$y = h(t)$ のグラフは右の通り. (*) の解、すなわち、
 $y = a$ と $y = h(t)$ の共有点の数だけ接線が存在するので、

$a > 0$ のとき	0 本
$a = 0, a < \frac{-4}{e^2}$ のとき	1 本
$a = \frac{-4}{e^2}$ のとき	2 本
$\frac{-4}{e^2} < a < 0$ のとき	3 本

..... (答)



- (1) 1 から n までの自然数を, 2 で割り切れる限り繰り返し何度も割っていくと,
すべての自然数は $2^p \cdot (\text{奇数})$ の形で表すことができる.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & \dots \\ \rightarrow & 2^0 \cdot 1, & 2^1 \cdot 1, & 2^0 \cdot 3, & 2^2 \cdot 1, & 2^0 \cdot 5, & 2^1 \cdot 3, & 2^0 \cdot 7, & 2^3 \cdot 1, & 2^0 \cdot 9, & 2^1 \cdot 5, & \dots \end{array}$$

このときの p の最大値が $f(n)$ となる.

$$2^{f(n)} \leq n < 2^{f(n)} \cdot 2 \quad \text{より,} \quad S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ の右辺の中から } \frac{1}{2^{f(n)}} \text{ を}$$

除いたものを通分すると, $\frac{(\text{自然数})}{2^{f(n)-1} \cdot (\text{奇数})}$ となる. これに $\frac{1}{2^{f(n)}}$ をたしたものが S_n であるから,

$$S_n = \frac{(\text{自然数})}{2^{f(n)-1} \cdot (\text{奇数})} + \frac{1}{2^{f(n)}} = \frac{2(\text{自然数}) + (\text{奇数})}{2^{f(n)} \cdot (\text{奇数})} = \frac{(\text{奇数})}{2^{f(n)} \cdot (\text{奇数})}$$

よって, S_n は 2 つの奇数 a_n, b_n を用いて, $S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$ と表せる.

(証明終)

- (2) $n \geq 2$ のとき, $f(n) \geq 1$ であるから, (1) より S_n は整数とならない.

(証明終)

- (3)(i) $0 < m \leq 2^{f(n)}$ のとき, m から n までの自然数を, 2 で割り切れる限り繰り返し何度も

割っていくと, 1 つだけ $f(n)$ 回割れるものがある. よって, $S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n}$ の

右辺の中から $\frac{1}{2^{f(n)}}$ を除いたものを通分し, $\frac{1}{2^{f(n)}}$ をたすと考えれば, (1) と同様に表せる

ことになり, $1 \leq m < n$ より $n \geq 2$ であるから, (2) より $S_{m,n}$ は整数とならない.

- (ii) $m > 2^{f(n)}$ のとき, $n < 2^{f(n)} \cdot 2$ であるから, m から n までの自然数は高々

$$(2^{f(n)} \cdot 2 - 1) - 2^{f(n)} = 2^{f(n)} - 1 \text{ 個}$$

$$\text{ゆえに, } S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2^{f(n)}} + \frac{1}{2^{f(n)}} + \dots + \frac{1}{2^{f(n)}} \leq \frac{2^{f(n)} - 1}{2^{f(n)}} < 1$$

(i)(ii) より, $S_{m,n}$ は整数にならない.

(証明終)