

平成26年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

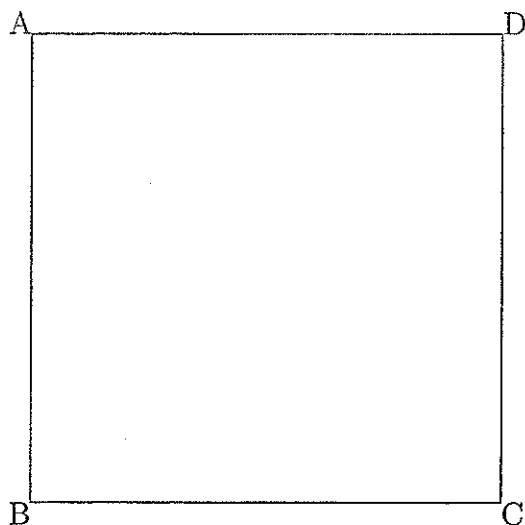
1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は13頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学Ⅰ 数学 A	教育学部 算数科選修, 技術科教育分野	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学 A 数学 B	文学部 教育学部 法政経学部 園芸学部 先進科学プログラム 行動科学科 情報教育分野 物理化学・生命化学分野, 人間科学関連分野	☐ 1 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7
	教育学部 数学科教育分野	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学 A 数学 B	先進科学プログラム 物理学分野, 電気電子工学分野, ナノサイエンス分野, 画像科学分野, 情報画像分野	☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学 A 数学 B 数学 C	理学部 薬学部 工学部 医学部 理学部 物理学科, 化学科, 生物学科, 地球科学科	☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
	医学部	☐ 5 ☐ 6 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 13
	理学部 数学・情報数理学科	☐ 5 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 13

- 1** 下図のような1辺の長さ10cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し、正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また、点Rは時刻0にBを出発し、正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点RがAに達するまでに $\triangle PQR$ の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。



- 2** $\triangle ABC$ において、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C とするとき、次の等式が成り立つとする。

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$$

また、 A, B, C のうち最も大きな角は 120° であるとする。このとき、 $\cos A, \cos B, \cos C$ の値をそれぞれ求めよ。

3 p は奇数である素数とし、 $N = (p+1)(p+3)(p+5)$ とおく。

(1) N は 48 の倍数であることを示せ。

(2) N が 144 の倍数になるような p の値を、小さい順に 5 つ求めよ。

4 A, B ふたりは、それぞれ1から4までの番号のついた4枚のカードを持ち、それを用いて何回かの勝負から成るつぎのゲームをする。

- 初めに A, B はそれぞれ4枚のカードを自分の袋に入れ、よくかきまぜる。
- A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に1枚ずつカードを取り出し、そのカードを比較して1回の勝負を行う。すなわち、大きい番号のついたカードを取り出したほうがこの回は勝ちとし、番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- 袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- A, B どちらかが2回勝てば、カードの取り出しをやめて、2回勝ったほうをゲームの勝者とする。4枚すべてのカードを取り出してもいずれも2回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A が0勝0敗4引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (2) A が1勝1敗2引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ。

5 袋の中に、赤玉が3個、白玉が7個が入っている。袋から玉を無作為に1つ取り出し、色を確認してから、再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに、赤玉を A 回 (ただし $0 \leq A \leq N$) 取り出す確率を $p(N, A)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N, A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が10の倍数、すなわち $N = 10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n, 0), p(10n, 1), \dots, p(10n, 10n)$ のうち、一番大きな値は $p(10n, 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0以上の整数 a 、自然数 b に対して、 $\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$ を示す。ただし $0! = 1$ とする。

(ii) 0以上 $10n$ 以下の整数 m に対して、 $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$ を示す。

- 6** 座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

- 7** 実数 a に対し, 関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点を持つための a の範囲を求めよ。
またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

8 座標平面上に、円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ と点 $Q(1, 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3, 0)$ とし、 x 軸上の点 $P_2, P_3, \dots$ を以下の条件によって決め、 P_n の座標を $(p_n, 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き、その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき、3 点 Q, T_n, P_{n+1} は同一直線上にある。
($n = 1, 2, \dots$)

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 T_1 の座標を求めよ。
- (2) 点 P_2 の座標を求めよ。
- (3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。
- (4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

9 n, m を 0 以上の整数とし,

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

を示せ。

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{{}_m C_0}{n+1} - \frac{{}_m C_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m \frac{{}_m C_m}{n+m+1}$$

を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

10 関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2 \cos x)$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ の値を求めよ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x \geq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geq f(x)$ が成り立つことを示せ。

11 関数 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) と正の実数 a について、以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ における $\frac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

12 以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 座標平面上の点 $(0, a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ。

13 自然数 n に対して、和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

- (1) 各自然数 n に対して $2^k \leq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき、2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ。

- (2) $n \geq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

- (3) さらに、自然数 m, n ($m < n$) に対して、和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。 $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならないことを示せ。