

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x - |x - 6| \\ g(x) &= |f(x)| + x \end{aligned} \right\} \text{とおく.}$$

(I) $x \geq 6$ のとき

$$f(x) = x^2 - 6x - (x - 6) = (x - 6)(x - 1)$$

$$f(x) \geq 0 \text{ より } g(x) = f(x) + x = x^2 - 6x + 6 = (x - 3)^2 - 3$$

(II) $x \leq 6$ のとき

$$f(x) = x^2 - 6x + (x - 6) = (x - 6)(x + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } x \leq -1 \text{ のとき. } f(x) \geq 0 \text{ より} \\ \quad g(x) = f(x) + x = x^2 - 4x - 6 = (x - 2)^2 - 10 \\ \text{(ii) } -1 \leq x \leq 6 \text{ のとき. } f(x) \leq 0 \text{ より} \\ \quad g(x) = -f(x) + x = -x^2 + 6x + 6 = -(x - 3)^2 + 15 \end{array} \right.$$

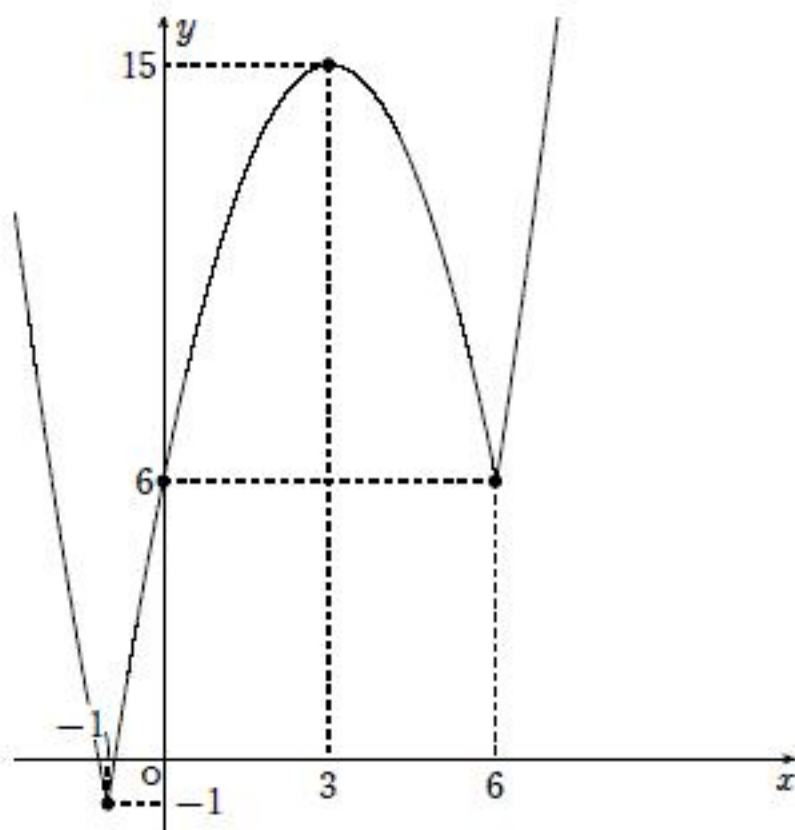
以上より, $y = g(x)$ のグラフは右.

与方程式の実数解の個数 N は

$y = g(x)$ と $y = a$ の交点の個数

に等しいから, 答は次.

a	...	-1	...	6	...	15	...
N	0	1	2	3	4	3	2



xyz 座標系を, $F(0, 0, 0), G(4, 0, 0), E(0, 4, 0), B(0, 0, 4)$ となるように定める.

- (1) $\overrightarrow{FP} = (0, 3, 4), \overrightarrow{FQ} = (a, 0, 4)$ だから

$$|\overrightarrow{FP}|^2 = 25, |\overrightarrow{FQ}|^2 = a^2 + 16, \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 16$$

$$\text{ゆえに } \triangle PFQ = \frac{1}{2} \sqrt{25(a^2 + 16) - 16^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25a^2 + 144} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2) 四面体 $BPFQ$ の体積を V とすると

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{6} BP \cdot BQ \cdot BF = 2a \\ V &= \frac{1}{3} BK \cdot \triangle PFQ \end{aligned} \right\} \text{と 2 通りにかけるから, (1) の結果も用いて}$$

$$BK = \frac{6a}{\triangle PFQ} = \frac{12a}{\sqrt{25a^2 + 144}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3) $a = 0$ では明らかだから, $a > 0$ とする.

$$\begin{aligned} BK \leq \frac{\sqrt{30a}}{5} &\iff 60a \leq \sqrt{30a} \cdot \sqrt{25a^2 + 144} \\ &\iff 60^2 \cdot a^2 \leq 30a(25a^2 + 144) \\ &\iff 120a \leq 25a^2 + 144 \\ &\iff (5a - 12)^2 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①は成り立つから, $BK \leq \frac{\sqrt{30a}}{5}$ も成り立つ.

$\triangle ADC$ と直線 BRE でメネラウスの定理より

$$\frac{AR}{RD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

よって, $\frac{AR}{RD} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$ すなわち, $\frac{AR}{RD} = 6$

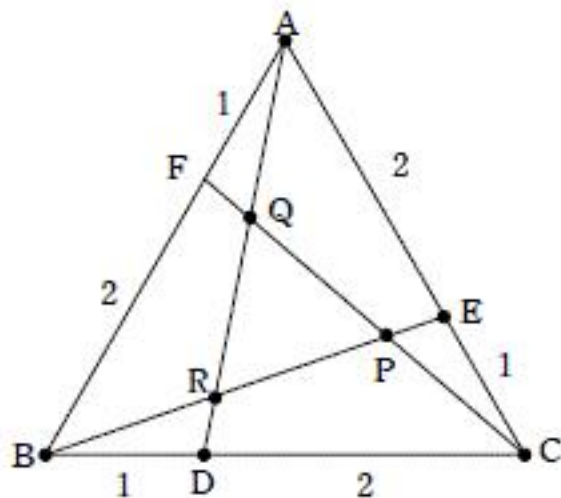
ゆえに

$$\triangle ABR = \triangle ABD \cdot \frac{AR}{AD} = \triangle ABC \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{AR}{AD} = \frac{2}{7} \triangle ABC$$

$\underbrace{\quad}_{\frac{1}{3}} \quad \underbrace{\quad}_{\frac{6}{7}}$

同様にして $\triangle BCP = \triangle CAQ = \frac{2}{7} \triangle ABC$ だから,

$$\triangle PQR = \left(1 - \frac{2}{7} \cdot 3\right) \underbrace{\triangle ABC}_{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{28} \quad \dots\dots (\text{答})$$



6の目が出ることを○、その余事象を×とかく.

(I) 4回目が○、5回目が×の場合.

1~3回目は(○1回 ×2回)または(○3回)だから

$$\left\{ {}_3C_1 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^3 \right\} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{380}{6^5} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(II) 4回目が×、5回目が○の場合.

1~3回目は(×3回)または(○2回 ×1回)だから

$$\left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^3 + {}_3C_2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right) \right\} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{700}{6^5} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{答は } \textcircled{1} + \textcircled{2} = \frac{5}{36} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

与方程式は, $(x \geq m \text{ かつ } m = -x^3 + 4x)$ ①

または $(x \leq m \text{ かつ } m = x^3 - 2x)$ ② と同値.

$$\textcircled{1} \iff x \geq -x^3 + 4x \text{ かつ } m = -x^3 + 4x$$

$$\iff x^3 - 3x \geq 0 \text{ かつ } m = -x^3 + 4x$$

$$\textcircled{2} \iff x \leq x^3 - 2x \text{ かつ } m = x^3 - 2x$$

$$\iff x^3 - 3x \geq 0 \text{ かつ } m = x^3 - 2x \quad \text{である.}$$

$f(x) = -x^3 + 4x$, $g(x) = x^3 - 2x$ とおく.

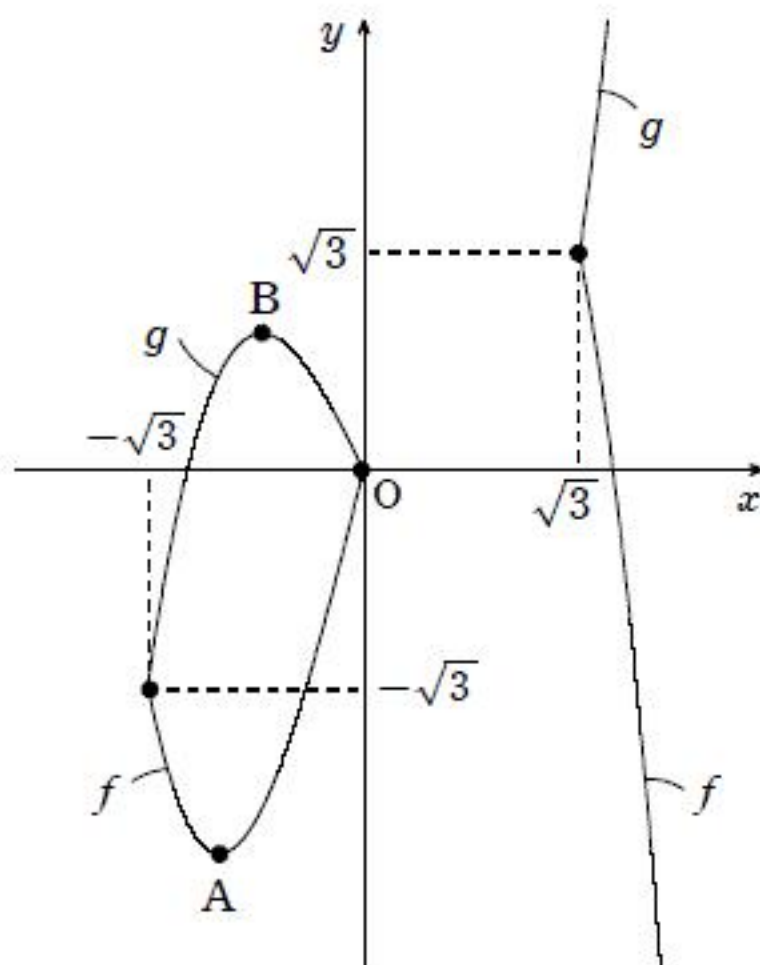
$x^3 - 3x \geq 0$ を解くと $(-\sqrt{3} \leq x \leq 0 \text{ または } x \geq \sqrt{3})$ だから,

この範囲における 曲線 ($y = f(x)$ または $y = g(x)$) と, 直線 $y = m$ との交点の個数が,
与方程式の実数解の個数 (N とする) に等しい.

$$A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right), B\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$$

図より答は次.

m	...	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	...	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	...
N	1	2	3	2	1



(1) $\text{mod. } 7$ の合同式を用いる. $8 \equiv 1$ である.

(I) $k = 3a$ ($a = 1, 2, 3, \dots$) のとき.

$$2^k = 2^{3a} = 8^a \equiv 1^a = 1$$

(II) $k = 3a + 1$ ($a = 0, 1, 2, \dots$) のとき.

$$2^k = 2^{3a+1} = 8^a \cdot 2 \equiv 1^a \cdot 2 = 2$$

(III) $k = 3a + 2$ ($a = 0, 1, 2, \dots$) のとき.

$$2^k = 2^{3a+2} = 8^a \cdot 4 \equiv 1^a \cdot 4 = 4$$

以上 (I) ~ (III) より,

「 2^k を 7 で割った余りが 4」 となる条件は「 k を 3 で割った余りが 2」 であること.

(2) $4m + 5n = 3(m + n) + m + 2n$ が 3 の倍数だから, $m + 2n = 3b$ ($b = 1, 2, \dots$) とかける.

ゆえに $mn = n(3b - 2n) = 3bn - 2n^2 = 3(bn - n^2) + n^2$ とかける.

$$\text{mod. } 3 \text{ で, } \begin{cases} n \equiv 0 \text{ なら } n^2 \equiv 0 \\ n \equiv 1 \text{ なら } n^2 \equiv 1 \\ n \equiv 2 \text{ なら } n^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \end{cases} \quad \text{だから } mn \equiv n^2 \equiv 0 \text{ または } 1 \text{ である.}$$

よって mn を 3 で割った余りは 2 ではないから, (1) で示したことより,

2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない.

(終)

(1) α は $x^2 - bx - c = 0$ の解だから, $\alpha^2 - b\alpha - c = 0$

$$\alpha^{n-1} \text{ をかけると } \alpha^{n+1} - b\alpha^n - c\alpha^{n-1} = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{同様に } \beta^{n+1} - b\beta^n - c\beta^{n-1} = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ より } \underbrace{(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})}_{a_{n+2}} - b \underbrace{(\alpha^n + \beta^n)}_{a_{n+1}} - c \underbrace{(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}_{a_n} = 0$$

$$\text{ゆえに } a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad \dots\dots ③ \text{ が成り立つ.}$$

$$(2) \quad a_1 = \alpha^0 + \beta^0 = 2, \quad a_2 = \alpha + \beta = b$$

これと③より 順次

$$a_3 = b^2 + 2c, \quad a_4 = b^3 + 3bc, \quad a_5 = b^4 + 4b^2c + 2c^2 \text{ を得る.}$$

(必要性)

すべての n について $a_n \in \mathbb{Z}$ とする. $a_2 \in \mathbb{Z}$ より $b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{これと } a_3 \in \mathbb{Z} \text{ より } 2c \in \mathbb{Z} \quad \dots\dots ④$$

$$a_4 - ba_3 = bc \text{ と } b, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \text{ より } bc \in \mathbb{Z}$$

$$a_5 = b^4 + 4b \cdot bc + 2c^2 \text{ と } a_5, b, bc \in \mathbb{Z} \text{ より } 2c^2 \in \mathbb{Z} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\text{④より } 2c = k \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ とかけて, これと⑤より } 2c^2 = 2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} \in \mathbb{Z}$$

ゆえに k^2 は偶数, したがって k は偶数である.

$$\text{よって } c = \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$$

(十分性)

$b, c \in \mathbb{Z}$ とする.

すべての自然数 n について $a_n \in \mathbb{Z}$ であることを帰納法で示す.

$$(I) \quad n=1, 2 \text{ のとき, } a_1 = 2, \quad a_2 = b \text{ より } a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$$

$$(II) \quad n=m \ (m \geq 1) \text{ のとき, } a_m, a_{m+1} \in \mathbb{Z} \text{ と仮定すると}$$

$$a_{m+2} = ba_{m+1} + ca_m \text{ より } a_{m+2} \in \mathbb{Z} \text{ である.}$$

(証明終)

2回目以降の $n-1$ 回で 1 点が x 回, 2 点が y 回とすると,

$$\begin{cases} x+y=n-1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 1+x+2y=m & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) $m=2n-1$ とすると, ②より $x+2y=2n-2$

これと①より $x=0, y=n-1$

$$\text{ゆえに } P_{n, 2n-1} = \underbrace{1}_{\text{1回目}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{2回目以降}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{2回目以降}} \cdots \cdots (\text{答})$$

次に $m=2n-2$ とすると, ②より $x+2y=2n-3$

これと①より $x=1, y=n-2$

$$\text{ゆえに } P_{n, 2n-2} = \underbrace{1}_{\text{1回目}} \cdot \underbrace{(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{2回目以降}} = \underbrace{(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{2回目以降}} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) ①, ②より $x=2n-m-1, y=m-n \cdots \cdots \textcircled{3}$

$n \leq m \leq 2n-1$ の下で, $2n-m-1 \geq 0, m-n \geq 0$ だから,

③を満たす a 以上の整数 x, y が存在する.

ゆえに

$$\begin{aligned} P_{n, m} &= \underbrace{1}_{\text{1回目}} \cdot \underbrace{{}_{n-1}C_{2n-m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{2回目以降}} \\ &= \frac{(n-1)!}{(2n-m-1)!(m-n)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) k 回目 ($2 \leq k \leq n$) で 1 点, 2 点となる確率は各々 $\frac{1}{2}$ である.

- (1) P_n を通り, $y=x$ と垂直な直線は

$$y = -(x - a_n) + a_n = -x + 2a_n$$

これと $x^2 - y^2 = 1$ を連立すると

$$x^2 - (-x + 2a_n)^2 = 1$$

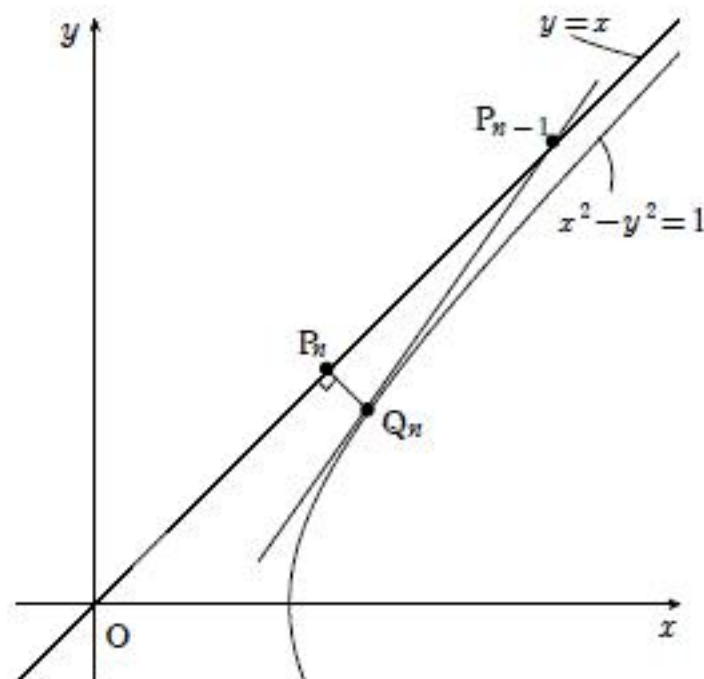
すなわち

$$4a_n x = 4a_n^2 + 1$$

$$x = a_n + \frac{1}{4a_n}$$

$y = -x + 2a_n$ より y も求めて

$$\underline{Q_n \left(a_n + \frac{1}{4a_n}, a_n - \frac{1}{4a_n} \right)} \quad \dots\dots (\text{答})$$



- (2) $Q_n(s, t)$ とおく. Q_n での接線は $sx - ty = 1$

これと $y = x$ を連立すると $sx - tx = 1$

したがって

$$\frac{1}{2a_n} x = 1$$

$$x = 2a_n$$

これが P_{n-1} の x 座標だから, $a_{n-1} = 2a_n$

すなわち

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$$

$$\underline{a_n = a_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3) 図より $P_n Q_n = \sqrt{2}(s - a_n) = \frac{\sqrt{2}}{4a_n} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{4a_0}$

$$P_n P_{n-1} = \sqrt{2}(a_{n-1} - a_n) = \sqrt{2}a_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} = \frac{\sqrt{2}a_0}{2^n}$$

$$\underline{\Delta P_n Q_n P_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot P_n Q_n \cdot P_n P_{n-1} = \frac{1}{4}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1) n についての帰納法で示す.

$$(I) \quad T_0(x)=1 \text{ より } T_0(\cos \theta)=1 (= \cos 0\theta)$$

$$T_1(x)=x \text{ より } T_1(\cos \theta)=\cos \theta$$

ゆえに $n=0, 1$ で成立.

(II) $n=k-2, k-1 (k \geq 2)$ での成立を仮定する.

$$T_{k-2}(\cos \theta)=\cos(k-2)\theta, \quad T_{k-1}(\cos \theta)=\cos(k-1)\theta$$

このとき $T_k(x)=2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$ より

$$\begin{aligned} T_k(\cos \theta) &= 2\cos \theta T_{k-1}(\cos \theta) - T_{k-2}(\cos \theta) \\ &= 2\cos \theta \cdot \frac{\cos(k-1)\theta}{\cos(k\theta-\theta)} - \frac{\cos(k-2)\theta}{\cos(k\theta-2\theta)} \\ &= 2\cos \theta (\cos k\theta \cos \theta + \sin k\theta \sin \theta) - (\cos k\theta \cos 2\theta + \sin k\theta \sin 2\theta) \\ &= \cos k\theta \underbrace{(2\cos^2 \theta - \cos 2\theta)}_1 + \sin k\theta \underbrace{(2\sin \theta \cos \theta - \sin 2\theta)}_0 \\ &= \cos k\theta \end{aligned}$$

ゆえに, $n=k$ で成立.

(証明終)

(2) 積分区間 $-1 \leq x \leq 1$ において, $x = \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおく.

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \text{ より, } dx = -\sin \theta \cdot d\theta \quad \begin{cases} x: -1 \rightarrow 1 \\ \theta: \pi \rightarrow 0 \end{cases}$$

ゆえに与定積分を I とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^0 T_n(\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos n\theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\} d\theta \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ なら } I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} n \neq 1 \text{ なら } I &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{n+1} \cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\theta \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{n+1} (\cos(n+1)\pi - 1) + \frac{1}{n-1} (\cos(n-1)\pi - 1) \right\} \end{aligned}$$

さらに n が奇数なら $\cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi = 1$ より $I=0$

n が偶数なら $\cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi = -1$ より

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{-2}{n-1} \right) = \frac{-2}{n^2-1}$$

まとめて

$$I = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ -\frac{2}{n^2-1} & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1) $y = \log x$ について、 $y' = \frac{1}{x}$ より、接点 $P(t, \log t)$ ($t > 0$) での接線は

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$$

これと放物線 $y = x^2 + c$ が接する条件は、

$$x^2 + c = \frac{1}{t}x - 1 + \log t \quad \text{すなわち} \quad x^2 - \frac{1}{t}x - \log t + 1 + c = 0 \text{ が重解をもつことから、}$$

$$\left(-\frac{1}{t}\right)^2 - 4(-\log t + 1 + c) = 0$$

ゆえに、 $\log t + \frac{1}{4t^2} - 1 = c$ (*) である。

このとき重解は $x = \frac{1}{2t}$ より、放物線との接点は $Q\left(\frac{1}{2t}, \frac{1}{4t^2} + c\right)$ である。

$$f(t) = \log t + \frac{1}{4t^2} - 1 \quad (t > 0) \text{ とおく。}$$

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^3} = \frac{2t^2 - 1}{2t^3}$$

より、 $f(t)$ の増減は右。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^2} \left(t^2 \log t + \frac{1}{4} - t^2 \right) = \infty \quad \left(\lim_{t \rightarrow +0} t^2 \log t = 0 \text{ より} \right)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{\log 2 + 1}{2} (= -\alpha \text{ とおく})$$

ゆえに $y = f(t)$ のグラフは右。

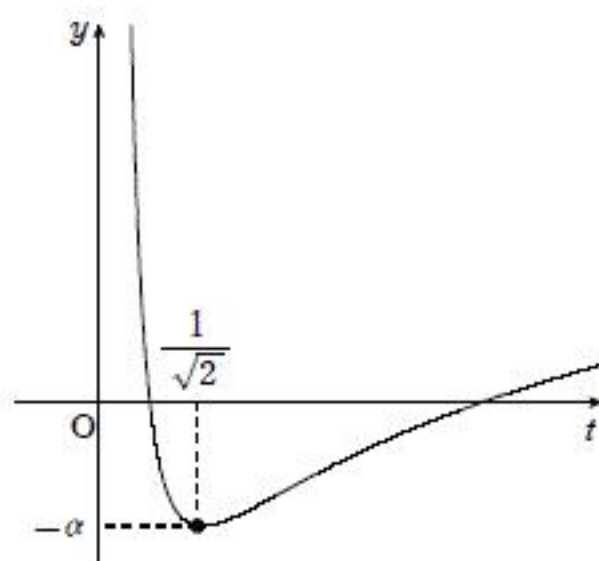
(共通接線の本数 N)

= ((*) の実数解 t の個数)

= ($y = f(t)$ と $y = c$ のグラフの交点数)

より、答は次。

c	...	$-\alpha$	...
N	0	1	2



(2) $c = -\alpha$ である。このとき $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、接点 P, Q は一致し、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \log 2\right) \quad \text{..... (答)}$$

(3) 右図のようになる。

$$S_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (-\log x) dx$$

$$= [-x \log x + x]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 1 - \frac{\log 2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{\alpha}} (-x^2 + \alpha) dx$$

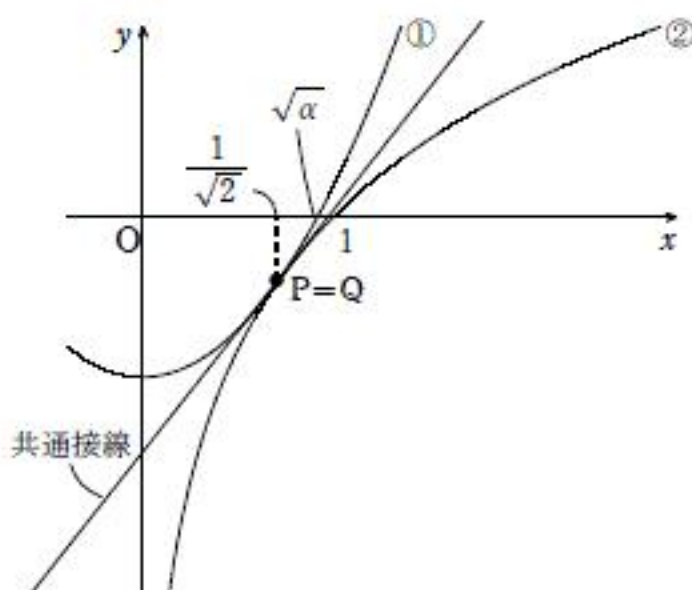
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \alpha x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\alpha} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

求める面積は

$$S_1 - S_2 = 1 - \frac{\log 2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{\log 2 + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{\log 2 + 1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{..... (答)}$$



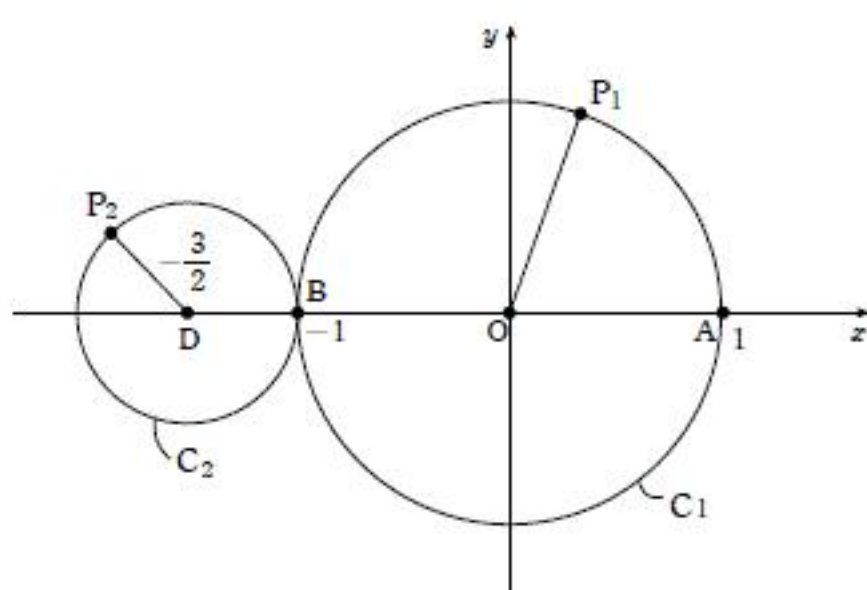
時刻 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) で
 動径 OP_1, DP_2 の回転角は
 それぞれ $t, 2t$ だから

$$\overrightarrow{OP_1} = (\cos t, \sin t)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP_2}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t)$$

$$= \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$



ゆえに, $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$

これを $(x(t), y(t))$ とおく.

$x(2\pi - t) = x(t)$, $y(2\pi - t) = -y(t)$ より, M の軌跡 S の $0 \leq t \leq \pi$ の部分と $\pi \leq t \leq 2\pi$ の部分は x 軸対称.

$$x'(t) = -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t = -\sin t \left(\cos t + \frac{1}{2}\right)$$

$$y'(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t = (\cos t + 1) \left(\cos t - \frac{1}{2}\right)$$

より, $0 \leq t \leq \pi$ での増減は次.

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$x'(t)$		-	-	-	0	+	
$y'(t)$		+	0	-	-	-	
(x, y)	(0, 0)	↖	$\left(-\frac{5}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$	↙	$\left(-\frac{9}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$	↘	(-1, 0)

よって曲線 S は図のようになる.

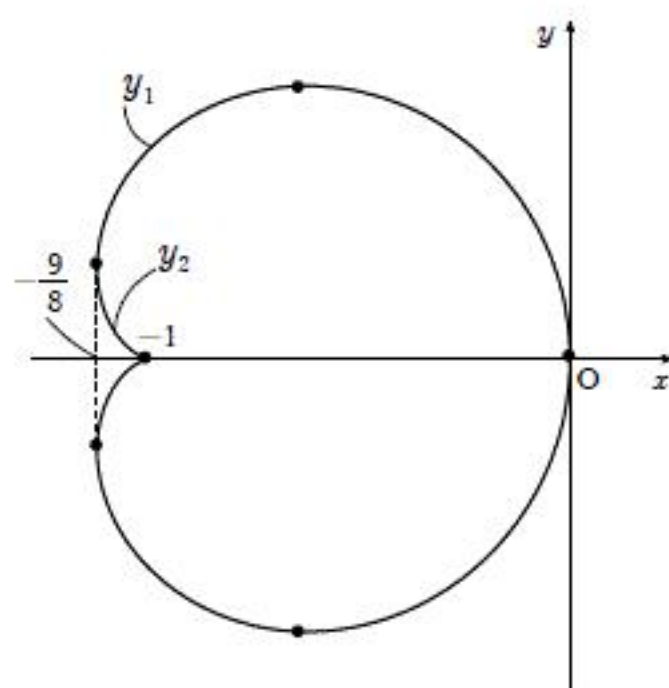
求める面積を T とすると,

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_{-\frac{9}{8}}^0 y_1 dx - \int_{-\frac{9}{8}}^{-1} y_2 dx \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 y(t)x'(t)dt - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} y(t)x'(t)dt \\ &= -\int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t)x'(t) &= \frac{1}{4}(2\sin t + \sin 2t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(\sin t + \sin 2t) \\ &= -\frac{1}{8}(2\sin^2 t + \sin^2 2t + 3\sin t \sin 2t) \\ &= -\frac{1}{8}\left\{1 - \cos 2t + \frac{1 - \cos 4t}{2} + \frac{3}{2}(\cos t - \cos 3t)\right\} \\ &= -\frac{1}{16}(3 + 3\cos t - 2\cos 2t - 3\cos 3t - \cos 4t) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (3 + 3\cos t - 2\cos 2t - 3\cos 3t - \cos 4t) dt \\ &= \frac{1}{8} \left[3t + 3\sin t - \sin 2t - \sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{3\pi}{8} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi$
 の部分の y をそれぞれ
 y_1, y_2 とかく.

$x+a=t$ とおくと、 $f(x)=|t+2\sin t-a+b|=g(t)$ とおける。

$$0 \leq x \leq 2\pi \iff a \leq t \leq a+2\pi \quad \cdots \cdots ①$$

さらに $h(t)=t+2\sin t$ とおく。

①での $h(t)$ の最大値と最小値の差を d_1 とする。

$y=g(t)=|h(t)-a+b|$ のグラフは、 $y=h(t)$ のグラフを y 軸方向に $-a+b$ (任意定数) だけ平行移動したものの、 $y \leq 0$ の部分を t 軸に関して対称に折り返したものだから、 $g(t)$ の最大値と最小値の差を d_2 とすると、

$$\frac{1}{2}d_1 \leq d_2 \leq d_1 \quad \cdots \cdots ② \text{ が成り立つ。}$$

次に $h'(t)=1+2\cos t$ より $0 \leq t \leq 2\pi$ での $h(t)$ の増減は次。

t	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{4\pi}{3}$		2π
$h'(t)$		+	0	-	0	+	
$h(t)$	0	↗	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	↗	2π

また任意の定数 k に対して、

$$h(k+2\pi)=h(k)+2\pi \quad \cdots \cdots ③ \text{ が成り立つ。}$$

ゆえに $y=h(t)$ のグラフの①の部分は、適当に平行移動すれば、

$y=h(t)$ の $c \leq t \leq c+2\pi$ の部分と一致する。

ただし $0 \leq c < 2\pi$ かつ $a=c+2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) とする。

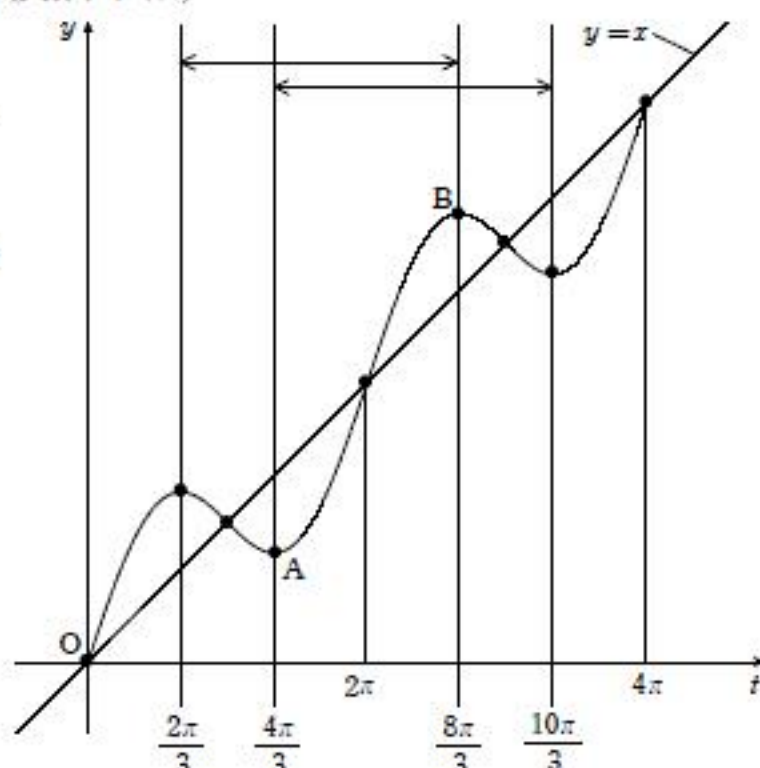
この移動によって d_1 は不変。

$c \leq t \leq c+2\pi$ ($0 \leq c < 2\pi$) での $h(t)$ の最大値を M 、最小値を m とする。

$d_1 = M - m$ である。

$y=h(t)$ のグラフは右のようになり、

$$\left. \begin{aligned} h\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = y_A \\ h\left(\frac{8\pi}{3}\right) &= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3} = y_B \end{aligned} \right\} \text{とおく。}$$



(I) $0 \leq c \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき。

$$M = h(c+2\pi)$$

$$m = h(c) \text{ または } y_A$$

$$\text{ゆえに } d_1 = h(c+2\pi) - h(c) = 2\pi \text{ または } d_1 = h(c+2\pi) - y_A \leq y_B - y_A = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \text{ (} 2\pi \text{ より大)}$$

(II) $\frac{2\pi}{3} \leq c \leq \frac{4\pi}{3}$ のとき。

$$M = y_B, \quad m = y_A \text{ より } d_1 = y_B - y_A = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

(III) $\frac{4\pi}{3} \leq c < 2\pi$ のとき。

$$M = y_B \text{ または } h(c+2\pi), \quad m = h(c)$$

$$\text{ゆえに, } d_1 = y_B - h(c) \leq y_B - y_A = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \text{ または } d_1 = h(c+2\pi) - h(c) = 2\pi$$

$$\text{以上(I)~(III)より, } d_1 \leq \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \quad \cdots \cdots ④$$

$$\text{一方, } M \geq h(c+2\pi), \quad m \leq h(c) \text{ より, } d_1 \geq h(c+2\pi) - h(c) = 2\pi \quad \cdots \cdots ⑤$$

$$④, ⑤ \text{ より } 2\pi \leq d_1 \leq \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\text{これと②より } \pi \leq d_2 \leq \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \text{ が成り立つ。}$$

(終)

(注) ②の証明

①において、 $\alpha = \max h(t) - a + b$, $\beta = \min h(t) - a + b$ とおく。

$$\alpha - \beta = \max h(t) - \min h(t) = d_1 \text{ である。}$$

(I) $\alpha \geq \beta \geq 0$ のとき。

$$d_2 = \alpha - \beta = d_1$$

(II) $\alpha \geq 0 \geq \beta$ かつ $\alpha \geq -\beta$ のとき。

$$d_2 = \alpha \text{ より}$$

$$d_1 - d_2 = (\alpha - \beta) - \alpha = -\beta \geq 0 \quad \text{ゆえに } d_2 \leq d_1$$

$$d_2 - \frac{1}{2}d_1 = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{1}{2}d_1 \leq d_2$$

(III) $\alpha \geq 0 \geq \beta$ かつ $\alpha \leq -\beta$ のとき。

$$d_2 = -\beta \text{ より}$$

$$d_1 - d_2 = (\alpha - \beta) - (-\beta) = \alpha \geq 0 \quad \text{ゆえに } d_2 \leq d_1$$

$$d_2 - \frac{1}{2}d_1 = -\beta - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{1}{2}d_1 \leq d_2$$

(IV) $0 \geq \alpha \geq \beta$ のとき。

$$d_2 = (-\beta) - (-\alpha) = \alpha - \beta = d_1$$

以上(I)~(IV)より、②が成り立つ。