

平成27年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は13ページです。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机の上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

1

a を実数とする。 x に関する方程式

$$|x^2 - 6x - |x - 6|| + x = a$$

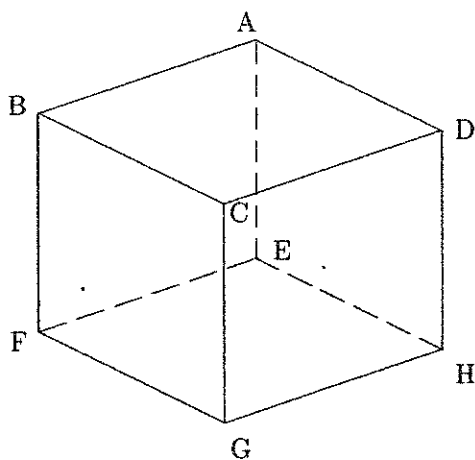
の実数解の個数を求めよ。

2

下図のような1辺の長さが4の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB 上に点 P を $BP=3$ となるように取り、辺 BC 上に点 Q を取る。また、B から $\triangle PFQ$ へ垂線 BK を下ろす。

BQ の長さを a として、以下の問いに答えよ。

- (1) a を用いて $\triangle PFQ$ の面積を表せ。
- (2) a を用いて BK の長さを表せ。
- (3) BK の長さは $\frac{\sqrt{30a}}{5}$ 以下であることを示せ。



3

1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において、 BC を $1:2$ に内分する点を D 、 CA を $1:2$ に内分する点を E 、 AB を $1:2$ に内分する点を F とし、さらに BE と CF の交点を P 、 CF と AD の交点を Q 、 AD と BE の交点を R とする。

このとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

4

さいころを5回振るとき、初めの4回においては6の目が偶数回出て、しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ。

ただし、6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす。

5

m を実数とする。 x に関する方程式

$$x^3 - 3x - |x - m| = 0$$

の実数解の個数を求めよ。

6

k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき、 k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (2) $4m + 5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき、 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

7

b と c を $b^2 + 4c > 0$ を満たす実数として、 x に関する 2 次方程式 $x^2 - bx - c = 0$ の相異なる解を α, β とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、つぎの問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は、 b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。

コインを n 回続けて投げ、1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

- コイン投げの第 1 回目には、1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において、ひとつ前の回と異なる面が出たら、1 点を得点とする。
- コイン投げの第 2 回目以降において、ひとつ前の回と同じ面が出たら、2 点を得点とする。

例えばコインを 3 回投げて (裏, 表, 裏) の順に出たときの得点は、 $1+1+1=3$ より 3 点となる。また (裏, 裏, 表) のときの得点は、 $1+2+1=4$ より 4 点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし、このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ が与えられたとき、 $P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。
- (2) $n \leq m \leq 2n-1$ について、 $P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。

9

双曲線 $x^2 - y^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$ の漸近線 $y = x \cdots \textcircled{2}$ 上の点 $P_0 : (a_0, a_0)$ (ただし $a_0 > 0$) を通る双曲線 $\textcircled{1}$ の接線を考え、接点を Q_1 とする。 Q_1 を通り漸近線 $\textcircled{2}$ と垂直に交わる直線と、漸近線 $\textcircled{2}$ との交点を $P_1 : (a_1, a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線 $\textcircled{1}$ の接線の接点を Q_2 , Q_2 を通り漸近線 $\textcircled{2}$ と垂直に交わる直線と、漸近線 $\textcircled{2}$ との交点を $P_2 : (a_2, a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様に点 $P_n : (a_n, a_n)$, Q_n を定義していく。

- (1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。
- (2) a_n を a_0 を用いて表せ。
- (3) $\triangle P_n Q_n P_{n-1}$ の面積を求めよ。

10

0 以上の整数 n に対して, 整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

となることを示せ。

(2) 定積分

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx$$

の値を求めよ。

11 c を実数とし, 曲線 $y = x^2 + c \cdots \textcircled{1}$ と曲線 $y = \log x \cdots \textcircled{2}$ の共通接線を考える。

- (1) 共通接線の本数を, 実数 c の値によって答えよ。
- (2) 共通接線が 1 本であるとき, その接線と $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ それぞれとの接点を求めよ。
- (3) 共通接線が 1 本であるとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

12

平面上に2つの円

$$C_1: x^2 + y^2 = 1, \quad C_2: \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

があり、点 $(-1, 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き、点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く。二点 P_1, P_2 はそれぞれ点 $(1, 0)$ および点 $(-1, 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。 P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1, 0)$ に戻り、 P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1, 0)$ に戻るものとする。 P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して、その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

13

関数 $f(x) = |x + 2\sin(x + a) + b|$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ での最大値と最小値の差は、定数 a, b によらず常に π 以上で、かつ $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学Ⅰ 数学A	教育学部 算数科選修, 技術科教育分野	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B	文学部 教育学部 法政経学部 園芸学部 先進科学プログラム 行動科学科 情報教育分野 物理化学・生命化学分野, 人間科学関連分野	☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6
	教育学部 数学科教育分野	☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム 物理学科, 化学科, 生物学科, 地球科学科 物理学分野, 電気電子工学分野, ナノサイエンス分野, 画像科学分野, 情報画像分野	☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11
	医学部	☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 12 ☐ 13
	理学部 数学・情報数理学科	☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 12