

- (1) $x^2 - ax + b = 0$ が実数解をもつとして、それを α, β とする。解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

いま、 a, b はさいころの目だから、

$$\begin{cases} \alpha + \beta > 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta > 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より、2つの実数 α, β は同符号であり、①より、 α, β が共に負であることはないから、 α, β は共に正である。

ゆえに、実数解は存在すれば正である。 (終)

- (2) 判別式 $D = a^2 - 4b$ とおく。

実数解が1個となる条件は $D = 0$ つまり、

$$a^2 = 4b$$

これを満たす (a, b) は次の2個。

$$(2, 1), (4, 4)$$

ゆえに、答は、 $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$

- (3) 実数解が2個となる条件は $D > 0$ つまり、

$$a^2 > 4b$$

これを満たす (a, b) は次の17個。

$$a = 3, b = 1, 2$$

$$a = 4, b = 1, 2, 3$$

$$a = 5, b = 1, 2, \cdots, 6$$

$$a = 6, b = 1, 2, \cdots, 6$$

ゆえに、答は、 $\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$

(1) 直線 AB の方程式は,

$$y = -\frac{11}{5}x + 11$$

格子点が存在する x の範囲は,

$$x = 1, 2, 3, 4 \text{ である.}$$

$$\bullet x=1 \text{ のとき, } 1 \leq y < \frac{44}{5}$$

$$\therefore y=1, 2, \dots, 8 \text{ より, } 8 \text{ 個}$$

$$\bullet x=2 \text{ のとき, } 1 \leq y < \frac{33}{5}$$

$$\therefore y=1, 2, \dots, 6 \text{ より, } 6 \text{ 個}$$

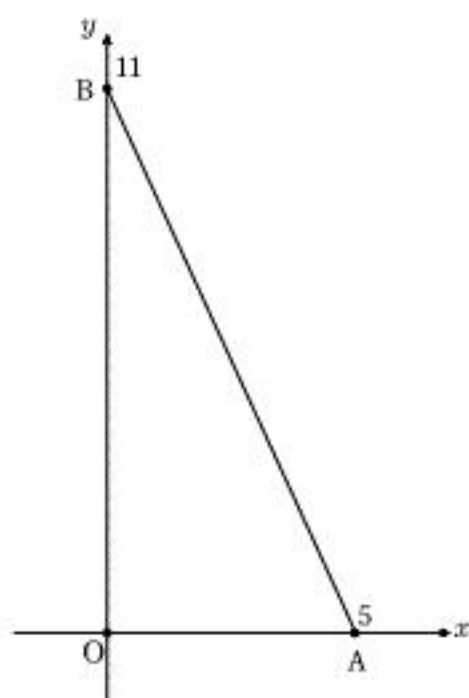
$$\bullet x=3 \text{ のとき, } 1 \leq y < \frac{22}{5}$$

$$\therefore y=1, 2, 3, 4 \text{ より, } 4 \text{ 個}$$

$$\bullet x=4 \text{ のとき, } 1 \leq y < \frac{11}{5}$$

$$\therefore y=1, 2 \text{ より, } 2 \text{ 個}$$

答は $8+6+4+2=20$ 個



(2) $\triangle OPQ$ の内部の格子点の個数を N とする. 条件は $N = \frac{20}{2} = 10$ となること.

$$\text{直線 PQ: } y = -\frac{n}{m}x + n$$

(I) $m=1$ のとき $N=0$ だから不適.

$$(II) \quad m=2 \text{ のとき } PQ: y = -\frac{n}{2}x + n$$

$$x=1 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{n}{2}$$

より, 最大でも $N=5$ ($n=11$ のとき) だから不適.

$$(III) \quad m=3 \text{ のとき } PQ: y = -\frac{n}{3}x + n$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{2n}{3} \\ x=2 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{n}{3} \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} n=11 \text{ なら } N=10 \\ n=10 \text{ なら } N=9 \end{cases}$$

であり, n が減るとき, N が増えることはないから, 適するのは $n=11$ のみ.

以下, 同様に調べていく.

$$(IV) \quad m=4 \text{ のとき } PQ: y = -\frac{n}{4}x + n$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{3n}{4} \\ x=2 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{n}{2} \\ x=3 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{n}{4} \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} n=8 \text{ なら } N=9 \\ n=9 \text{ なら } N=12 \end{cases}$$

だから, 不適.

$$(V) \quad m=5 \text{ のとき } PQ: y = -\frac{n}{5}x + n$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{4n}{5} \\ x=2 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{3n}{5} \\ x=3 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{2n}{5} \\ x=4 \text{ かつ } 1 \leq y < \frac{n}{5} \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} n=5 \text{ なら } N=6 \\ n=6 \text{ なら } N=10 \\ n=7 \text{ なら } N=12 \end{cases}$$

ゆえに, $n=6$.

以上より, 答は

$$\underline{(m, n) = (3, 11), (5, 6)}$$

3

$$(1) \quad \angle BP_1E = \angle CP_1P_2 \\ \triangle BP_1E \sim \triangle CP_1P_2 \\ \therefore \frac{BP_1}{BE} = \frac{CP_1}{CP_2}$$

ここで、 $BP_1 = s$, $BE = \frac{1}{3}$, $CP_1 = 1-s$ より、

$$CP_2 = \frac{1-s}{3s}$$

l_2 が D を通る条件は、 $CP_2 = 1$

$$\therefore \frac{1-s}{3s} = 1$$

$$1-s = 3s$$

$$\underline{s = \frac{1}{4}} \quad (0 < s < 1 \text{ を満たす})$$

(2) l_3 が線分 AD と交わるために、 l_2 が線分 CD と交わる必要だから、 $CP_2 \leq 1$

$$\therefore \frac{1-s}{3s} \leq 1$$

$$1-s \leq 3s$$

$$\underline{\frac{1}{4} \leq s < 1} \quad \dots\dots ①$$

$s = \frac{1}{4}$ なら、 $P_2 = D = P_3$ より、 $DP_3 = 0$

以下では、 $\frac{1}{4} < s < 1$ とする、

$\angle P_1P_2C = \angle P_3P_2D$ より、 $\triangle P_1P_2C \sim \triangle P_3P_2D$

$$\therefore \frac{DP_3}{DP_2} = \frac{CP_1}{CP_2} \left(= \frac{BP_1}{BE} = 3s \quad \because (1) \right)$$

ここで、 $DP_2 = 1 - CP_2 = 1 - \frac{1-s}{3s} = \frac{4s-1}{3s}$ より、

$$\underline{DP_3 = 4s-1} \quad \left(s = \frac{1}{4} \text{ でも成り立つ} \right)$$

P_3 が線分 AD 上にある条件より、 $DP_3 \leq 1$

$$\therefore 4s-1 \leq 1 \quad \therefore s \leq \frac{1}{2}$$

これと、①より、 s の変域は、

$$\underline{\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}} \quad \dots\dots ②$$

(3) $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}$ のとき

$\triangle BP_1E \sim \triangle CP_1P_2 \sim \triangle DP_3P_2$ であり、相似比

$$BE : CP_2 : DP_2 = \frac{1}{3} : \frac{1-s}{3s} : \frac{4s-1}{3s} \\ = s : (1-s) : (4s-1)$$

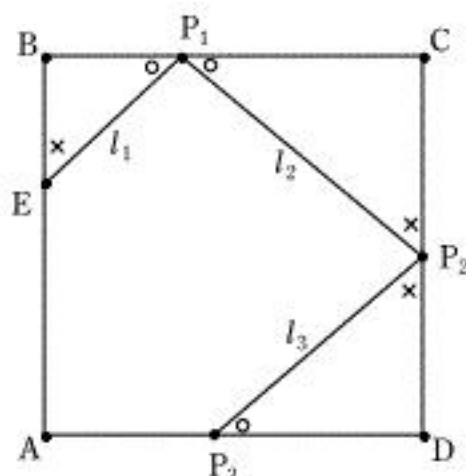
より、 $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 = z$ とおくと、

$$z = \frac{s + (1-s) + (4s-1)}{s} EP_1 = 4EP_1 \\ = 4\sqrt{s^2 + \frac{1}{9}} \quad \left(s = \frac{1}{4} \text{ でも成り立つ} \right)$$

②も考えて、

$$s = \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \max z = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

$$s = \frac{1}{4} \text{ のとき} \quad \min z = \frac{5}{3}$$



- (1) P, Q が異なる点であることに注意すると、図形の x 軸対称性より、直線 PQ が原点 O を通るとき、O は線分 PQ の中点であり、 $PQ = 2 \cdot OP$ である。

さて、 $P = (t, -t^2 + 2)$ とおくと、

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ であり、}$$

$$OP^2 = t^2 + (-t^2 + 2)^2 = t^4 - 3t^2 + 4$$

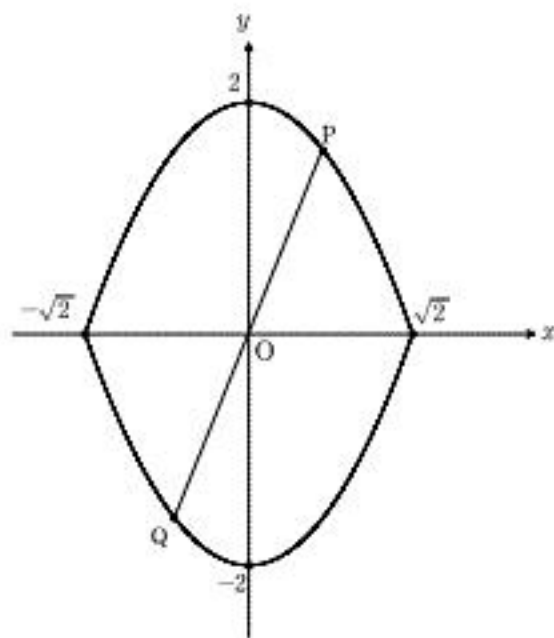
$u = t^2$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より、 $0 \leq u \leq 2$ であり、

$$OP^2 = u^2 - 3u + 4 = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

ゆえに、 $u = \frac{3}{2}$ のとき、 $\min OP^2 = \frac{7}{4}$

$u = 0$ のとき、 $\max OP^2 = 4$

よって、PQ の最大値 4、最小値 $\sqrt{7}$



- (2) 直線 PQ が O を通らないとき、 $\triangle OPQ$ が存在するから、

$$PQ < OP + OQ$$

(1) より、 $\max OP = 2$ 、同様に $\max OQ = 2$ だから、

$$OP + OQ \leq 4 \quad \therefore PQ < 4$$

これと(1)より、 $\max PQ = 4$

a, t の範囲に注意すると、四角形 ABCD は領域 $0 \leq x \leq 2$ かつ $0 \leq y \leq 2$ に含まれる。

$$\triangle OAD = \frac{1}{2}t(2-at)$$

$$\triangle AEB = \frac{1}{2}t^2(2-t)$$

$$\triangle BFC = \frac{1}{2}t(2-t^2)$$

$$\triangle CGD = \frac{1}{2}at(2-t)$$

これらの和を $f(t)$ とおくと、

$$f(t) = -t^3 + (1-a)t^2 + (a+2)t$$

であり、 $S(t) = 4 - f(t)$ だから、

「 $S(t)$ が最小 $\iff f(t)$ が最大」である。

$$f'(t) = -3t^2 + 2(1-a)t + a+2$$

$f'(t) = 0$ の判別式を D とすると、

$$D/4 = (1-a)^2 + 3(a+2) = a^2 + a + 7 > 0$$

$$f'(0) = a+2 > 0$$

$$f'(1) = 1-a$$

(I) $1-a \geq 0 \iff 0 < a \leq 1$ のとき

$f'(t)$ のグラフを考えて

$f'(t)$ の符号を判断すると、

$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	...	1
$f'(t)$		+	
$f(t)$		↗	

ゆえに、答は $t=1$

(II) $1-a < 0 \iff 1 < a < 2$ のとき

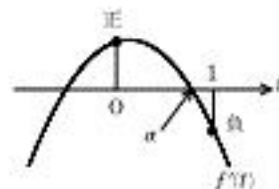
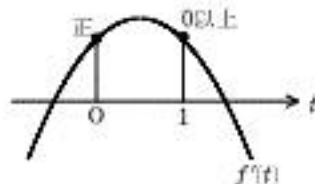
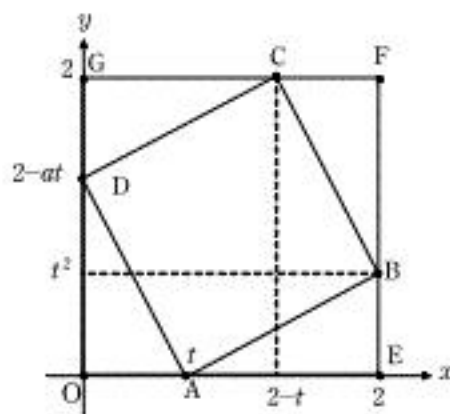
$$f'(t) = 0 \iff t = \frac{1-a \pm \sqrt{a^2+a+7}}{3}$$

であり、符号上のものを α とおく。

$0 < \alpha < 1$ だから、 $f(t)$ の増減は

t	0	...	α	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

ゆえに、答は $t = \alpha = \frac{1-a + \sqrt{a^2+a+7}}{3}$



答をまとめておくと、

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1 \text{ のとき, } t=1 \\ 1 < a < 2 \text{ のとき, } t = \frac{1-a + \sqrt{a^2+a+7}}{3} \end{cases}$$

次のように記号 A, B, C を定める.

記号	さいころの目	確率	移動
A	1	$\frac{1}{6}$	不動
B	2, 3	$\frac{1}{3}$	+1
C	4, 5, 6	$\frac{1}{2}$	原点へ

(1)

- $a \geq 4$ なら確率は 0
- $a = 3$ となるのは, 3 回連続 B のときで, 確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

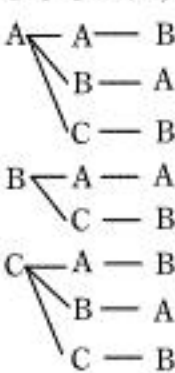
- $a = 2$ となるのは, 次の場合.



確率は

$$3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- $a = 1$ となるのは, 次の場合.



確率は

$$\frac{1}{108} + \frac{1}{108} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

- 以上より, $a \neq 0$ の確率が $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{43}{108}$

$$\text{だから, } a = 0 \text{ の確率は } 1 - \frac{43}{108} = \frac{65}{108}$$

まとめると,

$a = 0$ なら	$\frac{65}{108}$
$a = 1$ なら	$\frac{1}{4}$
$a = 2$ なら	$\frac{1}{9}$
$a = 3$ なら	$\frac{1}{27}$
$a = 4$ なら	0

(2) C の回数で場合分けをする.

(I) C が 0 回のとき

$$n \text{ 回すべて A より, } \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{①}$$

(II) C が 1 回以上のとき

最後に C が出るのが k 回目とする. ($1 \leq k \leq n$)

k 回目より前は何でもよく,

k 回目より後はすべて A だから,

$$1^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot 6^k$$

k ついて和をとると,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \sum_{k=1}^n 6^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{6(6^n - 1)}{6 - 1} = \frac{3}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} \text{②}$$

$$\text{答は, } \text{①} + \text{②} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) (2) で求めた確率を p_n とする. また, $p_0 = 1$ と定める.

最後に $x = 0$ にいるのが k 回目 ($0 \leq k \leq n - 1$) とすると,

$k + 1$ 回目以降はすべて $x = 1$ にいるから, その確率は,

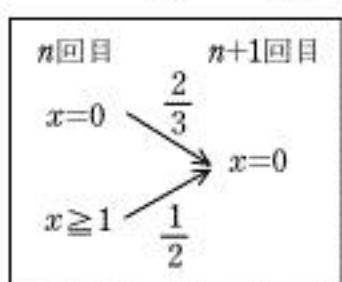
$$\begin{aligned} & p_k \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ 3 + 2 \left(\frac{1}{6}\right)^k \right\} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot 6^k \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} (3 \cdot 6^k + 2) \end{aligned}$$

k についての和をとると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (3 \cdot 6^k + 2) \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left\{ 3 \cdot \frac{6^n - 1}{6 - 1} + 2n \right\} \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left\{ \frac{3}{5} \cdot 6^n + \frac{10n - 3}{5} \right\} \\ &= \frac{6}{25} + \frac{20n - 6}{25} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

(2), (3) の別解

(2) 求める確率を p_n とし, $p_0 = 1$ と定める.



$n + 1$ 回目に $x = 0$ にいるのは,
 n 回目に $x = 0$ にいて, $n + 1$ 回目に A または C になるときか
 n 回目に $x \geq 1$ にいて, $n + 1$ 回目に C となるときである.

ゆえに,

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{2} (1 - p_n) = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{2} \quad (n = 0 \text{ でも成立})$$

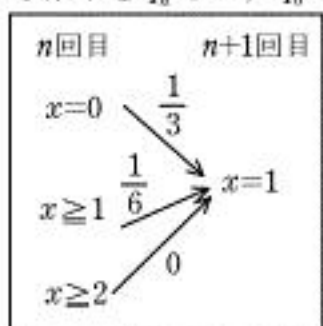
$$\therefore p_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{3}{5} \right)$$

$\left\{ p_n - \frac{3}{5} \right\}$ 公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列だから,

$$p_n - \frac{3}{5} = \left(p_0 - \frac{3}{5} \right) \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

(3) 求める確率を q_n とし, $q_0 = 0$ と定める.



(2) と同様に
 左の推移図より漸化式を作ると,

$$q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n \quad (n = 0 \text{ でも成立})$$

$$\therefore 6^{n+1} q_{n+1} = 2 \cdot 6^n p_n + 6^n q_n$$

$a_n = 6^n q_n$ とおき, (2) の結果を代入すると,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{6}{5} \cdot 6^n + \frac{4}{5}$$

ゆえに, $n \geq 1$ のときに,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{6}{5} \cdot 6^k + \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{6^n - 1}{6 - 1} + \frac{4}{5} n \\ &= \frac{6}{25} \cdot 6^n + \frac{20n - 6}{25} \\ \therefore q_n &= \frac{a_n}{6^n} = \frac{6}{25} + \frac{20n - 6}{25} \left(\frac{1}{6} \right)^n \end{aligned}$$

(1) $x > 0$ とする, $f(x) = x - \log x$ とおく.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ より, $f(x)$ の増減は,

x	0	...	1	...
$f'(x)$	$\times$	-	0	+
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	1	$\nearrow$

となるから, $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$

$\therefore \log x < x$ (終)

(2) $x > 1$ として, $g(x) = \frac{1}{\log x}$ とおく.

$$g'(x) = -\frac{1}{x(\log x)^2}$$

区間 $[a, b]$ における平均値の定理より,

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c) \quad \dots\dots ①$$

かつ $a < c < b$ を満たす c が存在する,

①より,

$$\frac{g(a) - g(b)}{b - a} = \frac{1}{c(\log c)^2} \quad \dots\dots ②$$

であり, $x(\log x)^2$ は $x > 1$ で単調増加だから, $1 < a < c$ より,

$$0 < a(\log a)^2 < c(\log c)^2$$

$$\therefore \frac{1}{c(\log c)^2} < \frac{1}{a(\log a)^2} \quad \dots\dots ③$$

②, ③より,

$$\frac{g(a) - g(b)}{b - a} < \frac{1}{a(\log a)^2}$$

両辺に $b - a$ (> 0) をかけると,

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b - a}{a(\log a)^2} \quad (\text{終})$$

(別) $1 < a < b$ において, a を定数, b を変数とみて, b の関数 $h(b)$ を

$$h(b) = \frac{b - a}{a(\log a)^2} - \frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b}$$

$$h'(b) = \frac{1}{a(\log a)^2} - \frac{1}{b(\log b)^2}$$

ここで, $x(\log x)^2$ は $x > 1$ で単調増加だから,

$$0 < a(\log a)^2 < b(\log b)^2$$

$$\therefore \frac{1}{a(\log a)^2} > \frac{1}{b(\log b)^2}$$

ゆえに, $h'(b) > 0$ だから, $h(b)$ は単調増加であり,

$$h(b) > h(a) = 0$$

よって, 結論を得る. (終)

(3) $x \geq e$ とする.

$$p(x) = \int_e^x \frac{dt}{t \log(t+1)} - \log(\log x) - \frac{1}{2(\log x)^2} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{1}{x \log(x+1)} - \frac{1}{x \log x} + \frac{1}{x(\log x)^3} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\log(x+1)} - \frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log x)^3} \right) \end{aligned}$$

(2)で, $a = x, b = x+1$ とすると, (このとき, $1 < a < b$ であることに注意して)

$$\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log(x+1)} < \frac{1}{x(\log x)^2} \quad \dots\dots ④$$

さらに, (1)より,

$$1 \leq \log x < x \quad \therefore \frac{1}{x(\log x)^2} < \frac{1}{(\log x)^3} \quad \dots\dots ⑤$$

④, ⑤より,

$$\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log(x+1)} < \frac{1}{(\log x)^3}$$

$$\therefore \frac{1}{\log(x+1)} - \frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log x)^3} > 0$$

ゆえに, $p'(x) > 0$ だから, $p(x)$ は単調増加で,

$$p(x) \geq p(e) = 0$$

よって, 結論を得る. (終)

(1) $z^7 = 1$ より,

$$z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + \dots + z + 1) = 0$$

これと、 $z \neq 1$ より、 $z^6 + z^5 + \dots + z + 1 = 0$

ゆえに、

$$z + z^2 + \dots + z^6 = \underline{-1} \quad \text{.....①}$$

(2) $z^n = \cos \frac{2\pi n}{7} + i \sin \frac{2\pi n}{7}$ より,

z^n は 1 の 7 乗根であり、図のようになる。(n は整数)

$\alpha = z + z^2 + z^4$ より,

$$\bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4 = z^6 + z^5 + z^3$$

$$\therefore \alpha + \bar{\alpha} = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \underline{-1} \quad (\because \text{①})$$

$$\begin{aligned} \alpha \bar{\alpha} &= (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3) \\ &= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7 \\ &= 1 + z^6 + z^4 + z + 1 + z^5 + z^3 + z^2 + 1 \\ &= \underline{2} \quad (\because z^7 = 1 \text{ と ①}) \end{aligned}$$

ゆえに、 $\alpha, \bar{\alpha}$ は $t^2 + t + 2 = 0$ の 2 解であり、

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

ここで、

$$\text{Im}(\alpha) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} > 0$$

$$\left(\because \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{6\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7} > \sin \frac{6\pi}{7} \right)$$

よって、

$$\alpha = \underline{\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}}$$

(3) 方程式 $x^7 = 1$ の 7 個の解が,

$$x = 1, z, z^2, \dots, z^6$$

だから、因数定理より、

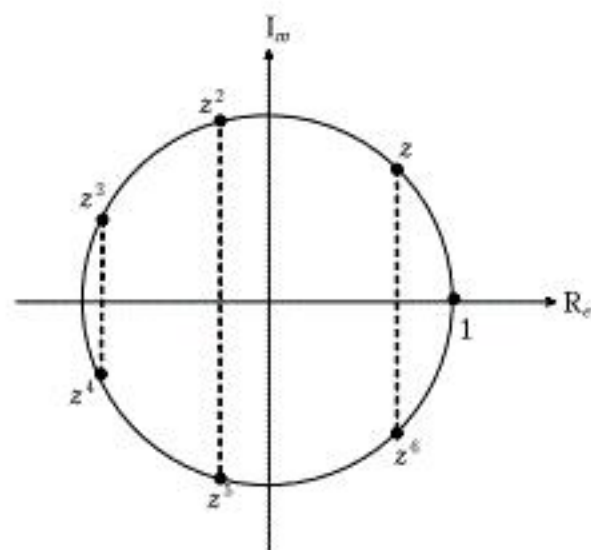
$$x^7 - 1 = (x - 1)(x - z)(x - z^2) \dots (x - z^6)$$

両辺を $x - 1$ で割った商を考えて、

$$x^6 + x^5 + \dots + x + 1 = (x - z)(x - z^2) \dots (x - z^6)$$

ここで、 $x = 1$ とすると、

$$(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^6) = \underline{7}$$



(1) $P(X, Y)$ とおくと, $R(X, 2)$

$$\overline{OQ} = t \overline{OR} = (tX, 2t)$$

とかけて,

$$2t = Y \quad \therefore t = \frac{Y}{2}$$

ゆえに, $Q\left(\frac{XY}{2}, Y\right)$

Q は円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ の $y \neq 0$ の部分を動くから,

$$\left(\frac{XY}{2}\right)^2 + (Y-1)^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad Y \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より,

$$\frac{1}{4}X^2Y^2 + Y^2 - 2Y = 0$$

これと②より,

$$\frac{1}{4}X^2Y + Y - 2 = 0$$

$$\therefore Y = \frac{8}{X^2 + 4} \quad (\textcircled{2} \text{ を満たす})$$

よって, C の方程式は

$$\underline{y = \frac{8}{x^2 + 4}}$$

(2)

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_{-a}^a \left(\frac{8}{x^2 + 4} \right)^2 dx \\ &= 128\pi \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

$x = 2 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおいて, $a = 2 \tan \theta$ かつ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす

θ (ただ1つ存在する) を α とおくと,

$$\begin{cases} x: 0 \rightarrow a \\ \theta: 0 \rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \quad \therefore dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$x^2 + 4 = 4(\tan^2 \theta + 1) = \frac{4}{\cos^2 \theta}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{V(a)}{128\pi} &= \int_0^\alpha \left(\frac{\cos^2 \theta}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^\alpha \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^\alpha \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{16} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\alpha = \frac{1}{16} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

さて, $a \rightarrow \infty$ のとき,

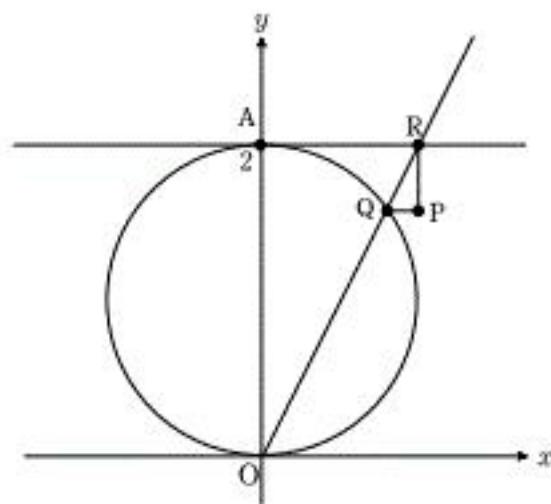
$$\tan \alpha = \frac{a}{2} \rightarrow \infty \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

より, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ だから,

$$\textcircled{3} \rightarrow \frac{\pi}{32}$$

よって,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = 128\pi \cdot \frac{\pi}{32} = \underline{4\pi^2}$$



(1) $y = \sin x$ について, $y' = \cos x$ より,

P での接線の傾きは, $\cos t$

ゆえに, $\vec{d} = (1, \cos t)$ とおくと, $\overrightarrow{PQ}$ と $\vec{d}$ は同じ向きで,

$|\overrightarrow{PQ}| = r, |\vec{d}| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$ より,

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{r}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \vec{d}$$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ より,

$$Q \left(t + \frac{r}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \sin t + \frac{r \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \right)$$

(2) Q の y 座標を t の関数とみて, $y(t)$ とおく, ($r > 0$ は定数)

$t = \frac{\pi}{4}$ のときに $y(t)$ が最大となるならば, $t = \frac{\pi}{4}$ で $y(t)$ が極大となるから,

$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$ である.

(必要条件)

$$y'(t) = \cos t + r \cdot \frac{-\sin t \sqrt{1 + \cos^2 t} - \cos t (\sqrt{1 + \cos^2 t})'}{1 + \cos^2 t}$$

ここで,

$$(\sqrt{1 + \cos^2 t})' = \frac{2 \cos t \cdot (-\sin t)}{2 \sqrt{1 + \cos^2 t}} = \frac{-\cos t \sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}$$

$$\therefore y'(t) = \cos t + r \cdot \frac{-\sin t (1 + \cos^2 t) + \cos^2 t \sin t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \cos t - \frac{r \sin t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} r = 0$$

ゆえに, $r = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ が必要.

さらに,

$$y''(t) = -\sin t - r \cdot \frac{\cos t (1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} - \sin t \left((1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \right)'}{(1 + \cos^2 t)^3}$$

ここで,

$$\left((1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} (1 + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cos t \cdot (-\sin t)$$

$$= -3 \cos t \sin t (1 + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y''(t) = -\sin t - r \cdot \frac{\cos t (1 + \cos^2 t) + 3 \cos t \sin^2 t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

ゆえに, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において, $y''(t) < 0$ であり, $y'(t)$ は単調減少.

よって, $r = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ ならば, $y(t)$ の増減は,

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$y'(t)$		+	0	-	
$y(t)$		↗		↘	

となり, $t = \frac{\pi}{4}$ のときに $y(t)$ は最大となる.

以上より, 答は $\underline{\underline{r = \frac{3\sqrt{6}}{4}}}$

$$m^2 - pn^2 = 1 \dots\dots\dots ①$$

(1) $m + n\sqrt{p} = \frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ を同値変形すると,

$$(m+n\sqrt{p})(x-y\sqrt{p}) = (x+y\sqrt{p})$$

$$\therefore (mx - pny) + (nx - my)\sqrt{p} = x + y\sqrt{p}$$

m, n, x, y, p は自然数で, $\sqrt{p}$ は無理数だから,

$$\begin{cases} mx - pny = x \\ nx - my = y \end{cases} \therefore \begin{cases} (m-1)x - pny = 0 \\ nx - (m+1)y = 0 \end{cases} \dots\dots\dots ②$$

$$\dots\dots\dots ③$$

ここで, $m+1, n$ の最大公約数を d として,

$$\begin{cases} m+1 = dx \\ n = dy \end{cases} \text{つまり} \begin{cases} x = \frac{m+1}{d} \\ y = \frac{n}{d} \end{cases}$$

とすると, x, y は互いに素な自然数であり,

$$(m-1)x - pny = \frac{1}{d}(m^2 - 1 - pn^2) = 0 \quad (\because ①)$$

$$nx - (m+1)y = \frac{1}{d}\{n(m+1) - n(m+1)\} = 0$$

となり, ②, ③が成り立つ.

ゆえに, 題意の (x, y) の存在が示された.

(2) ②, ③が成り立つ,

以下, $\text{mod. } p$ の合同式を用いる.

$$\text{②より, } (m-1)x = pny \quad \therefore (m-1)x \equiv 0$$

これと, p が素数であることより,

$$x \neq 0 \text{ ならば, } m-1 \equiv 0 \quad \therefore m \equiv 1$$

つまり, x が p で割り切れないならば, m を p で割った余りは 1 である.

次に, m を p で割った余りを 1 とする. ($m \equiv 1$)

$$\text{③より, } nx = (m+1)y \equiv 2y \quad \therefore nx \equiv 2y$$

仮に, $x \equiv 0$ とすると, $2y \equiv 0$ となり, p は 2 でない素数だから,

$y \equiv 0$ となる. これは x, y が互いに素であることと矛盾する.

ゆえに, $x \neq 0$ つまり, x は p で割り切れない.

以上で題意は示された. (終)