

平成28年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

1 1 個のさいころを 2 回投げ、最初に出た目を a 、2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。
- (2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。
- (3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。

2 座標平面上に 5 点 $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(0, 11)$, $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ をとる。ただし, m と n は $1 \leq m \leq 5$, $1 \leq n \leq 11$ を満たす整数とする。

- (1) 三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし, 格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことであり, 内部には辺上の点は含まれない。
- (2) 三角形 OPQ の内部に含まれる格子点の個数が三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数の半分になるような組 (m, n) をすべて求めよ。

3 座標平面上に 5 点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, $E\left(0, \frac{2}{3}\right)$ がある。点 E と点 $P_1(s, 1)$ ($0 < s < 1$) を通る直線を ℓ_1 とする。直線 $y = 1$ に関して ℓ_1 と対称な直線を ℓ_2 とし、 ℓ_2 と直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする。さらに、直線 $x = 1$ に関して ℓ_2 と対称な直線 ℓ_3 は x 軸と線分 AD 上で交わるとし、その交点を P_3 とする。

- (1) 直線 ℓ_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。
- (2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。
- (3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。

4 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で、点 P は放物線 $y = -x^2 + 2$ 上を動き、点 Q は放物線 $y = x^2 - 2$ 上を動く。ただし、P と Q は異なる点とする。

(1) 直線 PQ が原点を通るとき、線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

- 5** 座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおく。 k は $0 \leq k \leq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

- (1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。
- (2) $E\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。
- (3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を、線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。

- 6** a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、座標平面上の 4 点 $A(t, 0)$, $B(2, t^2)$, $C(2 - t, 2)$, $D(0, 2 - at)$ を考える。このとき、四角形 $ABCD$ の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。

7 数直線上の点 Q は、はじめは原点 $x = 0$ にあり、さいころを投げる

たびに以下のルールに従って移動する。 Q が $x = a$ にあるとき、

- 出た目が 1 ならば $x = a$ にとどまる。
- 出た目が 2, 3 ならば $x = a + 1$ へ動く。
- 出た目が 4, 5, 6 ならば $x = 0$ に戻る ($a = 0$ ならば動かない)。

- (1) 整数 $a \geq 0$ に対して、さいころを 3 回投げたとき、 Q が $x = a$ にある確率を求めよ。
- (2) サイコロを n 回投げたとき、 Q が $x = 0$ にある確率を求めよ。
- (3) サイコロを n 回投げたとき、 Q が $x = 1$ にある確率を求めよ。

8 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において, 不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2) $1 < a < b$ のとき, 不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

(3) $x \geq e$ において, 不等式

$$\int_e^x \frac{dt}{t \log(t+1)} \geq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

を示せ。ただし, e は自然対数の底である。

9 $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき, $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha \bar{\alpha}$ および α を求めよ。ただし, $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4)(1 - z^5)(1 - z^6)$ を求めよ。

10 2 点 $O(0, 0)$, $A(0, 2)$ を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と、点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 正の実数 a に対して、 C と x 軸と 2 直線 $x = a, x = -a$ によって囲まれる図形を、 x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

11 曲線 $C: y = \sin x$ 上を点 $P(t, \sin t)$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して、 P における C の接線上に $PQ = r$ となるように点 Q をとる。ただし、 Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t = \frac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

12 p を 2 でない素数とし、自然数 m, n は

$$(m + n\sqrt{p})(m - n\sqrt{p}) = 1$$

を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 (x, y) で

$$m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする。 x が p で割り切れないことと、 m を p で割った余りが 1 であることが、同値であることを示せ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学Ⅰ 数学 A	教育学部 小学校教員養成課程 (音楽・図工・体育を除く) 特別支援教育教員養成課程 幼稚園教員養成課程 中学校教員養成課程 (技術科教育分野)	1 2 3 4
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学 A 数学 B	文学部 法政経学部 国際教養学部 園芸学部 先進科学プログラム 人文学科 (行動科学コース) 物理化学・生命化学関連分野 人間科学関連分野	1 3 5 6
	教育学部 中学校教員養成課程 (数学科教育分野)	2 3 4 5 6 7
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学 A 数学 B	理学部 物理学科, 化学科 生物学科, 地球科学科 薬学部 工学部 先進科学プログラム 物理学関連分野 工学関連分野	5 7 8 9 10
	医学部	5 7 9 11 12
	理学部 数学・情報数理学科	5 7 9 10 11 12