

1 $P(t, 0)$ ($0 < t \leq 1, t \neq a$) とおくと, $Q(t, 2t)$

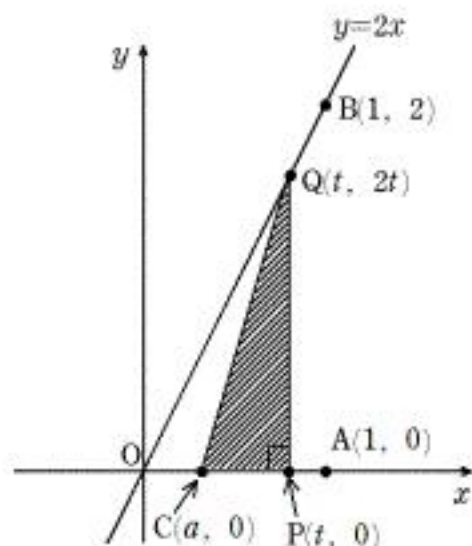
$$S(t) = \frac{1}{2} |(t-a) \cdot 2t| = t|t-a|$$

(1) $a=1$ のとき,

$$\begin{aligned} S(t) &= t|t-1| = -t(t-1) \\ &= -t^2 + t = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ の範囲で, $t = \frac{1}{2}$ のとき最大で,

$$\text{最大値 } S = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2)

$$S(t) = t|t-a| = \begin{cases} t(t-a) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} & (a < t \leq 1) \\ -t(t-a) = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} & (0 < t < a) \end{cases}$$

$y = S(t)$ のグラフは下図.

$S(t)$ の最大値は, $\frac{a^2}{4}, 1-a$ の大小を比較する.

$\frac{a^2}{4} > 1-a$ となる a の値の範囲は,

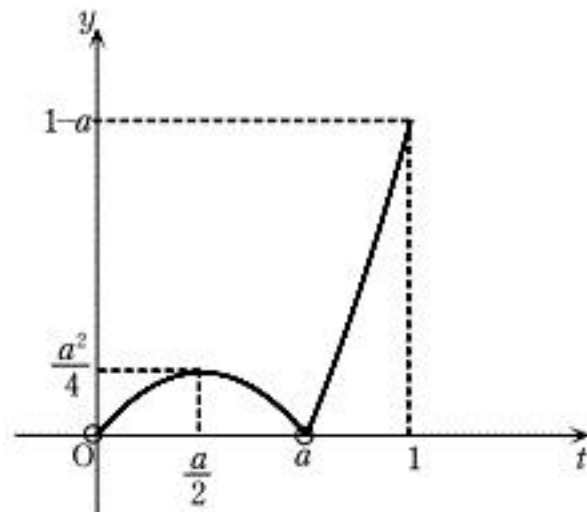
$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a - (-2 - 2\sqrt{2}))(a - (-2 + 2\sqrt{2})) > 0$$

$$-2 + 2\sqrt{2} < a \leq 1 \text{ のとき, } S = \frac{a^2}{4}$$

よって, $0 \leq a \leq 2\sqrt{2} - 2$ のとき, $S = 1 - a$

$$\therefore S = \begin{cases} 1-a & (0 \leq a \leq 2\sqrt{2} - 2) \\ \frac{a^2}{4} & (2\sqrt{2} - 2 < a \leq 1) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$



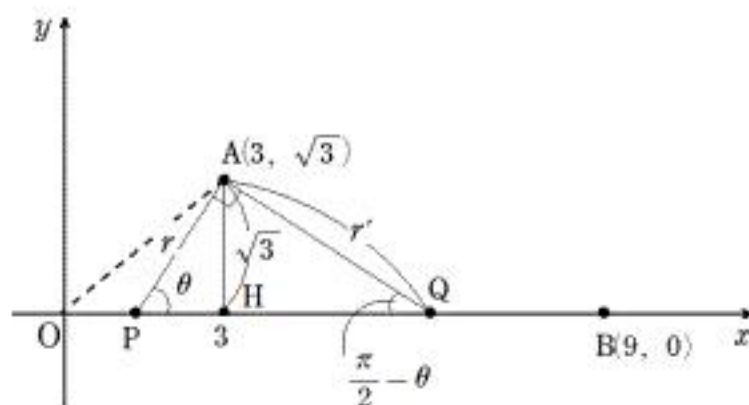
(1) $AP = r, AQ = r'$ とおくと,

$$r \sin \theta = \sqrt{3}, r' \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sqrt{3}$$

から,

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta}, r' = \frac{\sqrt{3}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} r \cdot r' = \frac{3}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{3}{\sin 2\theta} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2) S が最小となるのは, $\sin 2\theta$ が最大となるとき,

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のときで, } \underline{\text{最小値 } 3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

このとき,

$$\left. \begin{array}{l} PH = \sqrt{3} \therefore P \text{ の } x \text{ 座標} = 3 - \sqrt{3} \\ QH = \sqrt{3} \therefore Q \text{ の } x \text{ 座標} = 3 + \sqrt{3} \end{array} \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(これらは線分 OB 上にあり, 適する.)

$$(3) S = \frac{2}{3} \triangle AOB, \frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{3}, \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき,

$$P \text{ の } x \text{ 座標} = 3 - r \cos \theta = 3 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\tan \theta}$$

$$Q \text{ の } x \text{ 座標} = 3 + r' \sin \theta = 3 + \sqrt{3} \cdot \tan \theta$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき,}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \tan \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2 \tan \theta \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3} \tan \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta - 2\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0, \tan \theta = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

$$P \text{ の } x \text{ 座標} = 3 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} \mp \sqrt{2}) = \pm \sqrt{6} \quad (\text{以上, 複号同順})$$

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ の } x \text{ 座標} > 0 \text{ より, } P \text{ の } x \text{ 座標} = \sqrt{6} \\ Q \text{ の } x \text{ 座標} = 3 + \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 6 + \sqrt{6} \end{array} \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(これらは線分 OB 上にあり, 適する.)

$$(1) \quad a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$$

は連続する3つの整数の積で表せるから、

$3! = 6$ の倍数、 $\therefore$ 3の倍数 ■

(2) $a-b$ が3の倍数のとき、 $a-b=3k$ (k :整数)と表せ、

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 27k^3 + 9kab = 9(3k^3 + kab)$$

$3k^3 + kab$:整数より、 $a^3 - b^3$ は9の倍数 ■

(3) 「 $a^3 - b^3$ は3の倍数 $\rightarrow$ $a^3 - b^3$ は9の倍数」

($\because$) $a-b=3k, 3k\pm 1$ (k :整数)のときそれぞれを調べる、

(i) $a-b=3k$ のとき、(2)より、 $a^3 - b^3$ は9の倍数

(ii) $a-b=3k\pm 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (3k\pm 1)^3 + 3ab(3k\pm 1) \\ &= 3(9k^3 \pm 9k^2 + 3k) \pm 1 + 3ab(3k\pm 1) \end{aligned}$$

は3の倍数ではない、

以上(i), (ii)より、 $a^3 - b^3$ が3の倍数となるのは、 $a-b$ が3の倍数のときだけである、

$a^3 - b^3$ が3の倍数ならば、 $a-b$ は3の倍数、(2)より、 $a^3 - b^3$ は9の倍数 ■

- (1) 総得点 n が最大になるのは、3つの目が異なる目で、4, 5, 6の目になるときである。
 このときの得点は、15、目の出方の数は、3!

$$\therefore \text{最大値 } 15 \quad \therefore p_{15} = \frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

最小になるのは、得点が1点、これは3回投げた目が1, 1, 1と3つとも同数1になるときである。

$$\therefore \text{最小値 } 1 \quad \therefore p_1 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) p_6 :

- (i) 3つの目が異なる目のとき、 $x+y+z=6$ ($x>y>z$)

組み合わせは、(3, 2, 1)で目の出方は $3!=6$ 通り

- (ii) 2つの目が異なる目のとき、足して6になる組み合わせは、

$$(4, 2, \overset{\checkmark 4 \text{ or } 2 \text{ の目}}{\square}) \quad \cdots \cdots \text{目の出方} \quad 2 \times \left(\frac{3!}{2!} \right) = 6 \text{ 通り}$$

$$(5, 1, \overset{\checkmark 5 \text{ or } 1 \text{ の目}}{\square}) \quad \cdots \cdots \text{目の出方} \quad 2 \times \left(\frac{3!}{2!} \right) = 6 \text{ 通り}$$

- (iii) 3つの目が等しくなるとき、

(6, 6, 6)の目の出方が1通り

$$\therefore p_6 = \frac{6+6+6+1}{6^3} = \frac{19}{216} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(1) $y = x^3 - 3x$, $y' = 3x^2 - 3$ 点 $(t, t^3 - 3t)$ における接線は,

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t), y = (3t^2 - 3)x - 2t^3$$

上式が点 (a, b) を通るときの関係式は,

$$b = (3t^2 - 3)a - 2t^3$$

$$2t^3 - 3at^2 + 3a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=3$ になる必要十分条件は, ①が異なる 3 つの実数解をもつことである.

① の左辺を, $f(t) = 2t^3 - 3at^2 + 3a + b$ とおくと,

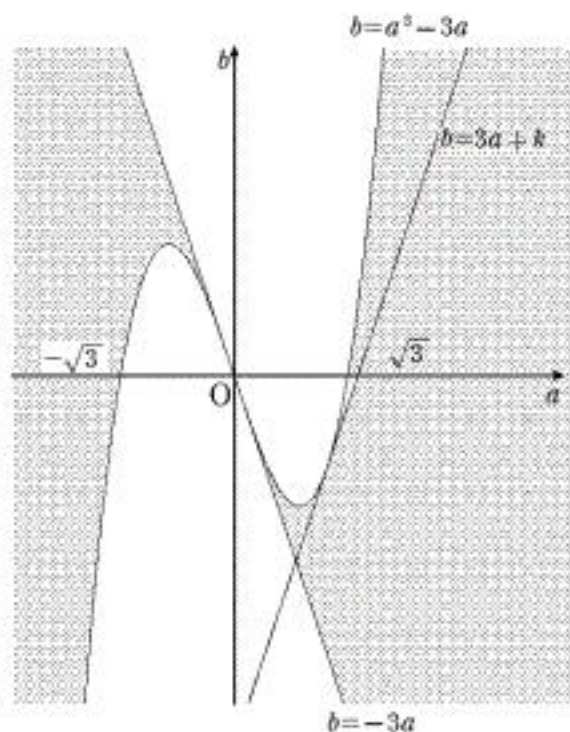
$$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a), f'(t) = 0 \text{ となる } t \text{ は } t = 0, a$$

①が異なる 3 つの実数解をもつ必要十分条件は,

$$a \neq 0 \text{ かつ}$$

$$f(0) \cdot f(a) < 0 \iff (3a + b) \cdot (-a^3 + 3a + b) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② を満たす領域は下図の打点部分。(境界を含まない)



(2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ を満たす点 (a, b) の

領域上は図の斜線部分である.

(境界は, $b = a^3 - 3a$, $a > 0$ の部分を含み, $b = -3a$, $a \leq 0$ を除く)

$$b - 3a = k, b = 3a + k \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

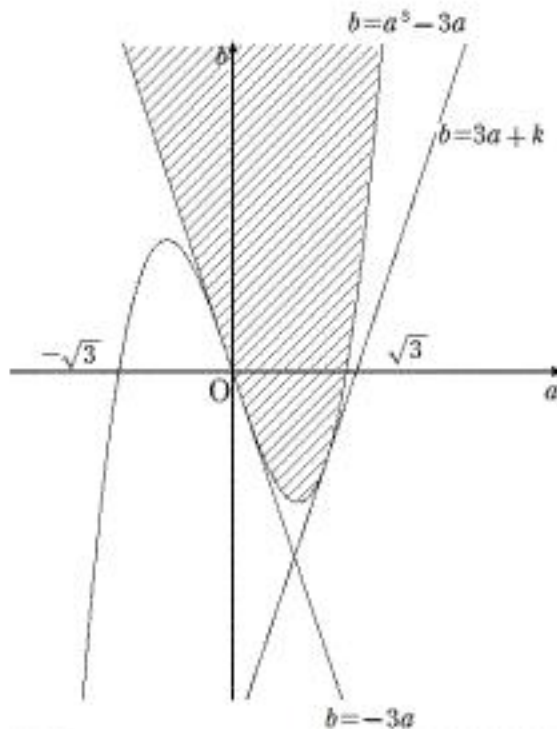
とおくと, k が最小になるのは,

③が $b = a^3 - 3a$ ($a > 0$) に接するときである.

$$b' = 3a^2 - 3 = 3 \text{ となるときの } a (> 0) \text{ は,}$$

$$a = \sqrt{2}, b = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\therefore k \text{ の最小値} = b - 3a = -\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ = -4\sqrt{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



(1) 総得点 n が最大になるのは、3つの目が異なる目で、4, 5, 6の目になるときである。

このときの得点は、15、目の出方の場合の数は、3!

$$\therefore \text{最大値 } 15 \quad \therefore p_{15} = \frac{3!}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

最小になるのは、得点が1点、これは3回投げた目が1, 1, 1と3つとも同数1になるときである。

$$\therefore \text{最小値 } 1 \quad \therefore p_1 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) p_6 :

(i) 3つの目が異なる目のとき、 $x+y+z=6$ ($x>y>z$)

組み合わせは、(3, 2, 1)で目の出方は $3!=6$ 通り

(ii) 2つの目が異なる目のとき、足して6になる組み合わせは、

$$(4, 2, \square) \quad \text{✓ 4 or 2 の目} \quad \cdots \cdots \text{目の出方 } 2 \times \left(\frac{3!}{2!} \right) = 6 \text{ 通り}$$

$$(5, 1, \square) \quad \text{✓ 5 or 1 の目} \quad \cdots \cdots \text{目の出方 } 2 \times \left(\frac{3!}{2!} \right) = 6 \text{ 通り}$$

(iii) 3つの目が等しくなるとき、

(6, 6, 6)の目の出方が1通り

$$\therefore p_6 = \frac{6+6+6+1}{6^3} = \frac{19}{216} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) (i) 3回とも同じ目が出るとき、得点は1, 2, 3, 4, 5, 6のときで、各々の確率は、 $\frac{1}{216}$

(ii) 3回のうち2回同じ目、

3回とも異なる場合の得点および確率は次のようになる。

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$(x, y, \square)$	(1, 2, $\square$)	(1, 3, $\square$)	(1, 4, $\square$)	(1, 5, $\square$)	(1, 6, $\square$)	(2, 6, $\square$)	(3, 6, $\square$)	(4, 6, $\square$)	(5, 6, $\square$)				
			(2, 3, $\square$)	(2, 4, $\square$)	(2, 5, $\square$)	(3, 5, $\square$)	(4, 5, $\square$)						
					(3, 4, $\square$)								
場合の数	6	6	12	12	18	12	12	6	6				
(x, y, z)				(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1, 2, 5)	(1, 2, 6)	(1, 3, 6)	(1, 4, 6)	(1, 5, 6)	(2, 5, 6)	(3, 5, 6)	(4, 5, 6)
						(1, 3, 4)	(1, 3, 5)	(1, 4, 5)	(2, 3, 6)	(2, 4, 6)	(3, 4, 6)		
							(2, 3, 4)	(2, 3, 5)	(2, 4, 5)	(3, 4, 5)			
場合の数				6	6	12	18	18	18	18	12	6	6

最大になるのは、 $n=9$ で、場合の数は、 $12+18=30$ 通り。

$$\text{最大となる、} n=9, \text{ 最大値 } p_9 = \frac{30}{216} = \frac{5}{36} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

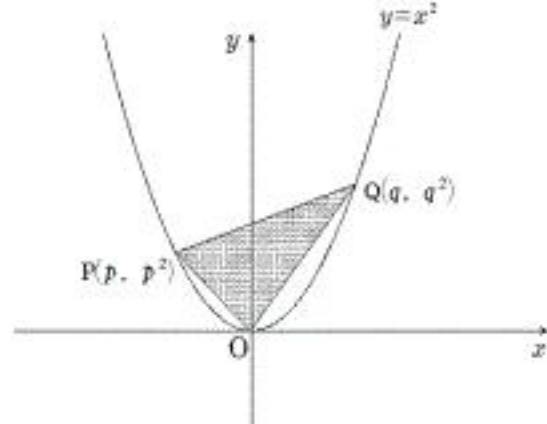
(1) $p < q, p + q = \sqrt{t}$

$$2 = PQ = \sqrt{(q-p)^2 + (q^2-p^2)^2},$$

$$4 = (q-p)^2 \{(q+p)^2 + 1\}$$

$$= (q-p)^2 (t+1)$$

から,
$$\begin{cases} q-p = \frac{2}{\sqrt{t+1}} \\ q+p = \sqrt{t} \end{cases} \quad \text{両式より, } \begin{cases} p = \frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{\sqrt{t+1}} \\ q = \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases}$$



.....(答)

(2) 面積公式より,

$$S = \frac{1}{2} |p^2q - pq^2| = \frac{1}{2} |pq| |p - q|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{t}{4} - \frac{1}{t+1} \right| \cdot \frac{2}{\sqrt{t+1}}$$

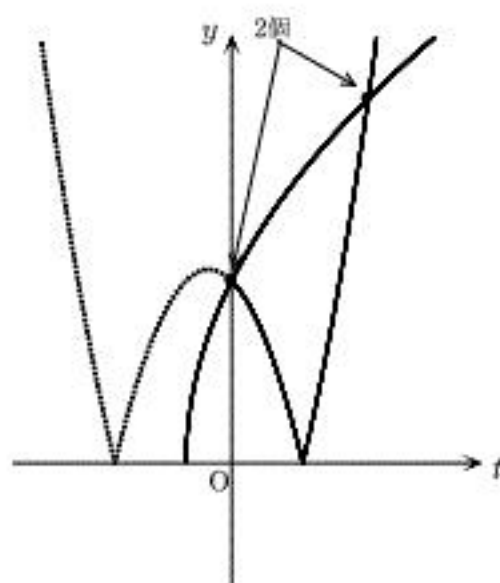
$$= \frac{|t^2 + t - 4|}{4 \cdot \sqrt{(t+1)^3}} \quad \text{.....(答)}$$

(3)

$$S=1 \iff |t^2 + t - 4| = 4 \cdot \sqrt{(t+1)^3} \quad (t \geq 0) \quad \text{.....①}$$

$$t \geq 0 \text{ で, } y = |t^2 + t - 4| = \left| \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{17}{4} \right| \text{ と } y = 4 \cdot \sqrt{(t+1)^3}$$

のグラフをかくと, $t \geq 0$ で, 2個 存在.



【別解】

①の辺々を2乗して,

$$t^4 + t^2 + 16 + 2t^3 - 8t^2 - 8t = 16(t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

$$\iff t^4 - 14t^3 - 55t^2 - 56t = 0$$

$$\iff t(t^3 - 14t^2 - 55t - 56) = 0$$

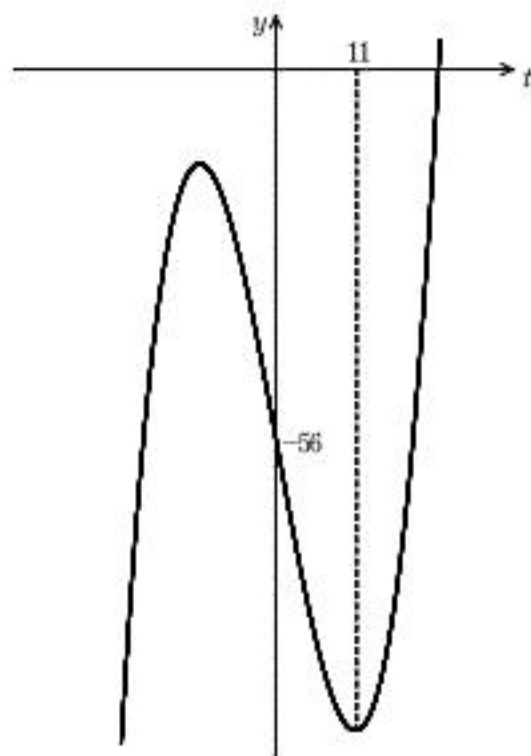
$f(t) = t^3 - 14t^2 - 55t - 56$ とおくと,

$$f'(t) = 3t^2 - 28t - 55 = (t-11)(3t+5)$$

$f'(t) = 0$ となる t は, $t = -\frac{5}{3}, 11$ でグラフは右図.

$f(t) = 0$ は, $t \geq 0$ に 1 個解をもち, $t = 0$ を含め,

解の個数は, 2個



$$\boxed{9} \quad w = \frac{z+2i}{2z+i} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$(1) \quad \textcircled{1} \iff z(2w-1) = -i(w-2)$$

$$w \neq \frac{1}{2} \text{ より, } z = \frac{-i(w-2)}{2w-1}$$

$|z|=1$ をみたすとき,

$$\begin{aligned} & \underbrace{|z|}_1 \underbrace{|2w-1|}_1 = \underbrace{|-i|}_1 |w-2| \\ \iff & |2w-1| = |w-2| \text{ 辺々2乗して,} \\ & (2w-1)(2\bar{w}-1) = (w-2)(\bar{w}-2) \\ & 4|w|^2 - 2\cancel{w} - 2\cancel{\bar{w}} + 1 = |w|^2 - 2\cancel{w} - 2\cancel{\bar{w}} + 4 \\ & |w|^2 = 1 \quad \therefore \underline{|w|=1} \quad \left(w \neq \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots\dots \text{(答)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad |z-\alpha|=1, (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=1$$

$$|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$|w|=r, \left| \frac{z+2i}{2z+i} \right| = r, |z+2i|^2 = r^2 |2z+i|^2$$

$$\begin{aligned} & (z+2i)(\bar{z}-2i) = r^2 (2z+i)(2\bar{z}-i) \\ \iff & |z|^2 - 2iz + 2i\bar{z} + 4 = r^2 \{ 4|z|^2 - 2iz + 2i\bar{z} + 1 \} \\ \iff & (4r^2-1)|z|^2 - 2i(r^2-1)z + 2i(r^2-1)\bar{z} + r^2 - 4 = 0 \\ & r^2 \neq \frac{1}{4} \\ & \underline{|z|^2 - 2i \cdot \frac{r^2-1}{4r^2-1} z + 2i \cdot \frac{r^2-1}{4r^2-1} \bar{z} + \frac{r^2-4}{4r^2-1} = 0} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②を比較して, これらが等しくなる条件は,

$$\begin{cases} 2i \cdot \frac{r^2-1}{4r^2-1} = \bar{\alpha} & \dots\dots\dots (i) \\ 2i \cdot \frac{r^2-1}{4r^2-1} = -\alpha & \dots\dots\dots (ii) \\ \frac{r^2-4}{4r^2-1} = |\alpha|^2 - 1 & \dots\dots\dots (iii) \end{cases}$$

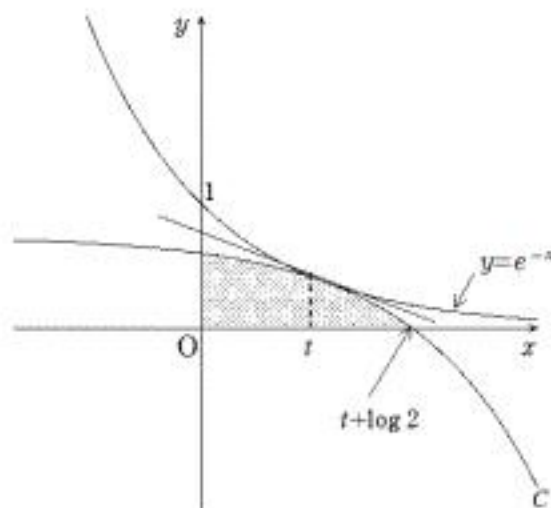
(ii)を(i)に代入して,

$$\begin{aligned} & \frac{r^2-4}{4r^2-1} = 4 \cdot \left| \frac{r^2-1}{4r^2-1} \right|^2 - 1 \\ \iff & (r^2-4)(4r^2-1) = 4(r^2-1)^2 - (4r^2-1)^2 \\ \iff & 4r^4 - 17r^2 + 4 = -12r^4 + 3, \\ & 16r^4 - 17r^2 + 1 = 0 \\ & (16r^2-1)(r^2-1) = 0 \\ & r = \frac{1}{4} \text{ のとき, } \alpha = -\frac{5}{2}i \\ & r = 1 \text{ のとき, } \alpha = 0 \\ & \therefore \underline{(r, \alpha) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{2}i \right), (1, 0)} \quad \dots\dots\dots \text{(答)} \end{aligned}$$

- (1) $y = -e^x$ を平行移動した曲線 C は, $C: y = -e^{x-a} + b$ とおける. C と $y = e^{-x}$ が, $x = t$ で共通接線をもつことから, $(y' = -e^{x-a}, y' = -e^{-x})$

$$\begin{cases} -e^{t-a} + b = e^{-t} \\ -e^{t-a} = -e^{-t}, e^{-t} = e^{t-a}, -t = t-a, a = 2t \\ b = 2e^{-t} \end{cases}$$

$$\therefore C: \underline{y = -e^{x-2t} + 2e^{-t}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



- (2) C と x 軸の交点の x 座標は, $y = 0$ を代入して,
 $e^{x-2t} = 2e^{-t}$
 $e^x = 2e^t$ から $x = t + \log 2$

$S(t)$ は上図の打点部分の面積に等しく,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t+\log 2} (-e^{x-2t} + 2e^{-t}) dx = [-e^{x-2t} + 2e^{-t}x]_0^{t+\log 2} \\ &= -e^{(t+\log 2)-2t} + 2e^{-t}(t+\log 2) + e^{-2t} \\ &= -e^{-t+\log 2} + 2e^{-t}(t+\log 2) + e^{-2t} \\ &= \underline{2(t-1+\log 2)e^{-t} + e^{-2t}} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3) $S'(t) = 2\{e^{-t} - (t-1+\log 2)e^{-t}\} - 2e^{-2t}$
 $= 2e^{-t}\{-e^{-t} - t + 2 - \log 2\}$
 ここで, $g(t) = -e^{-t} - t + 2 - \log 2$ とおくと,
 $g'(t) = e^{-t} - 1$
 $t > 0$ で $g'(t) < 0$ で $t \geq 0$ で $g(t)$ は単調に減少する関数.

$g(0) = 1 - \log 2 > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$ となるから,

$g(t) = 0$ は, $t \geq 0$ にただ 1 つの解をもつ.

その解を $t = t_0$ とすると, 増減表は右の通り.

$t = t_0$ で $S(t)$ は最大になり, $S(t)$ を最大にする t はただ 1 つ存在する. ■

t	0		t_0	
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗		↘

$$\boxed{11} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

(1)

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a_1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = 1 + 6 = 7$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right)} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{42}} = 43$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}\right)} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1806}} = \underline{1807} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad a_{n+1} - 1 = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_n - 1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の辺々を引いて,

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{a_n(a_n - 1)} \quad (n \geq 2)$$

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1), \quad a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1 \quad (n \geq 2)$$

$n = 1$ のとき, $a_2 = a_1(a_1 - 1) + 1 = 3$ となり, 成り立つ.

$n \geq 1$ で, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$

(3)

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2 = a_1 \leq a_n \leq a_{n+1}$$

となり, 数列 $\{a_n\}$ は, 単調に増加する数列.

よって, $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \geq 2(a_n - 1)$ となり,

$$a_n - 1 \geq 2(a_{n-1} - 1) \geq 2^2(a_{n-2} - 1) \quad \cdots \cdots \geq 2^{n-1}(a_1 - 1) = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n \geq 2^{n-1} + 1$$

これより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

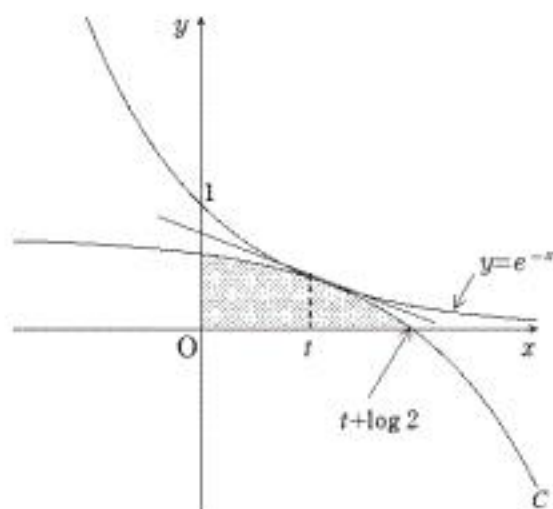
$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}\right) = 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (1) $y = -e^x$ を平行移動した曲線 C は、 $C: y = -e^{x-a} + b$ とおける、 C と $y = e^{-x}$ が、 $x = t$ で共通接線をもつこと

から、 $(y' = -e^{x-a}, y' = -e^{-x})$

$$\begin{cases} -e^{t-a} + b = e^{-t} \\ -e^{t-a} = -e^{-t}, e^{-t} = e^{t-a}, -t = t-a, a = 2t \\ b = 2e^{-t} \end{cases}$$

$$\therefore C: \underline{y = -e^{x-2t} + 2e^{-t}} \quad \dots\dots(\text{答})$$



- (2) C と x 軸の交点の x 座標は、 $y = 0$ を代入して、

$$e^{x-2t} = 2e^{-t}$$

$$e^x = 2e^t \quad \text{から} \quad x = t + \log 2$$

$S(t)$ は上図の打点部分の面積に等しく、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t+\log 2} (-e^{x-2t} + 2e^{-t}) dx = [-e^{x-2t} + 2e^{-t}x]_0^{t+\log 2} \\ &= -e^{(t+\log 2)-2t} + 2e^{-t}(t+\log 2) + e^{-2t} \\ &= -e^{-t+\log 2} + 2e^{-t}(t+\log 2) + e^{-2t} \\ &= \underline{2(t-1+\log 2)e^{-t} + e^{-2t}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (3)

$$\begin{aligned} S'(t) &= 2\{e^{-t} - (t-1+\log 2)e^{-t}\} - 2e^{-2t} \\ &= 2e^{-t}\{-e^{-t} - t + 2 - \log 2\} \end{aligned}$$

ここで、 $g(t) = -e^{-t} - t + 2 - \log 2$ とおくと、

$$g'(t) = e^{-t} - 1$$

$t > 0$ で $g'(t) < 0$ で $t \geq 0$ で $g(t)$ は単調に減少する関数.

$g(0) = 1 - \log 2 > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$ となるから、

$g(t) = 0$ は、 $t \geq 0$ にただ 1 つの解をもつ.

その解を $t = t_0$ とすると、増減表は右の通り.

$t = t_0$ で $S(t)$ は最大になり、 $S(t)$ を最大にする t はただ 1 つ存在する. ■

t	0		t_0	
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗		↘

- (4) $t_0 = \alpha$ で $g(\alpha) = 0$ をみたと、

$$\begin{aligned} g\left(\log \frac{12}{5}\right) &= -e^{-\log \frac{12}{5}} - \log \frac{12}{5} + 2 - \log 2 \\ &= -\frac{5}{12} - \log \frac{12}{5} + 2 - \log 2 \\ &= \frac{19}{12} - \log \frac{24}{5} > 1.5833 - 1.57 > 0 \\ \therefore \alpha &> \log \frac{12}{5} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\alpha > \log \frac{12}{5} \iff e^\alpha > \frac{12}{5}$$

$$S(\alpha) = \underline{2(\alpha - 1 + \log 2)e^{-\alpha} + e^{-2\alpha}}$$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff -e^{-\alpha} - \alpha + 2 - \log 2 = 0 \\ \alpha &= -e^{-\alpha} + 2 - \log 2 \end{aligned}$$

を上式に代入して、

$$S(\alpha) = 2(-e^{-\alpha} + 1)e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} = 2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha} = e^{-\alpha}(2 - e^{-\alpha})$$

$s = e^{-\alpha}$ とおくと、 $0 < s < \frac{5}{12}$ の範囲で、

$$S(\alpha) = s(2-s) = -(s-1)^2 + 1 < 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{95}{144}$$

$$\therefore S(\alpha) < \frac{95}{144} \quad \blacksquare$$

