C — 1

平成29年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってください。

1 定数 a は $0 \leqq a \leqq 1$ をみたすとする。座標平面上に 4 点 O(0, 0), A(1, 0), B(1, 2), C(a, 0) をとる。点 P は線分 OA 上，点 Q は線分 OB 上にあり，PQ $\perp$ OA をみたすものとする。点 P が点 O と点 C 以外を動くときの △PQC の面積の最大値を S とする。

(1) $a = 1$ のときの S を求めよ。

(2) S を a を用いて表せ。

2 座標平面上に 3 点 O(0, 0), A$(3, \sqrt{3})$, B(9, 0) がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle \mathrm{APQ} = \theta$ とし，$\triangle \mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle \mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

3 a, b を正の整数とするとき，次を証明せよ。

(1) $a^3 - a$ は 3 の倍数である。

(2) $a - b$ が 3 の倍数ならば，$a^3 - b^3$ は 9 の倍数である。

(3) $a^3 - b^3$ は，3 の倍数ならば 9 の倍数である。

4 1個のさいころを3回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1回目は，出た目が得点になる。
- 2回目は，出た目が1回目と同じならば得点は0，異なれば出た目が得点になる。
- 3回目は，出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし，総得点がnとなる確率をp_nとする。

(1) 総得点nの最大値，最小値と，それらのnに対するp_nを求めよ。

(2) p_6を求めよ。

5 n を4以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点Oを中心とする半径1の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点Pは線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

6 座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

(1) $n = 3$ をみたすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2) $-3a < b$ かつ $n \leqq 2$ をみたすように点 (a, b) が動くとき，$b - 3a$ の最小値を求めよ。

7 1個のさいころを3回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1回目は，出た目が得点になる。
- 2回目は，出た目が1回目と同じならば得点は0，異なれば出た目が得点になる。
- 3回目は，出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし，総得点がnとなる確率をp_nとする。

(1) 総得点nの最大値，最小値と，それらのnに対するp_nを求めよ。

(2) p_6を求めよ。

(3) p_nが最大となるようなnと，そのときのp_nを求めよ。

8 t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p, p^2)$，$\mathrm{Q}(q, q^2)$ で 3 つの条件

$$\mathrm{PQ} = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える。$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ。

9 複素数平面上の点 z $\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

10 曲線Cは曲線$y=-e^x$を平行移動したものとする。Cと曲線$y=e^{-x}$はx座標がt $(t \geqq 0)$である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする。Cとx軸とy軸とで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする。

(1) Cの方程式を求めよ。

(2) $S(t)$を求めよ。

(3) $S(t)$が最大となるようなtの値がただ1つ存在することを示せ。

11 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_5 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ。

12 曲線Cは曲線$y=-e^x$を平行移動したものとする。Cと曲線$y=e^{-x}$はx座標がt $(t \geqq 0)$である点を共有し，その点で共通の接線を持つとする。Cとx軸とy軸とで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする。

(1) Cの方程式を求めよ。

(2) $S(t)$を求めよ。

(3) $S(t)$が最大となるようなtの値がただ1つ存在することを示せ。

(4) $S(t)$が最大となるようなtの値をαとすると，$\alpha > \log\dfrac{12}{5}$であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$となることを示せ。必要ならば$\log\dfrac{24}{5} < 1.57$を用いてもよい。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学Ⅰ 数学A	教育学部	小学校教員養成課程 （音楽・図工・体育を除く） 特別支援教育教員養成課程 幼稚園教員養成課程 中学校教員養成課程 （技術科教育分野）	1 2 3 4
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B	国際教養学部 文学部 法政経学部 園芸学部 先進科学プログラム	 人文学科（行動科学コース） 物理化学・生命化学関連分野 人間科学関連分野	2 4 5 6
	教育学部	中学校教員養成課程 （数学科教育分野）	2 3 4 5 6 8
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 物理学関連分野 工学関連分野	5 7 8 9 10
	医学部		5 7 9 11 12
	理学部	数学・情報数理学科	5 7 8 9 11 12