

(1) $f(x)$ の判別式を D_1 として

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{4} &= (-2a)^2 - 2(3a^2 - 4a + 1) \\ &= -2a^2 + 8a - 2\end{aligned}$$

$f(x) = 0$ が実数解をもつ条件は

$$\begin{aligned}D_1 &\geq 0 \\ -2a^2 + 8a - 2 &\geq 0 \\ a^2 - 4a + 1 &\leq 0 \\ 2 - \sqrt{3} &\leq a \leq 2 + \sqrt{3} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f(2 + \sqrt{5}) &= 2(2 + \sqrt{5})^2 - 4a(2 + \sqrt{5}) + 3a^2 - 4a + 1 \\ &= 3a^2 + (-12 - 4\sqrt{5})a + 19 + 8\sqrt{5}\end{aligned}$$

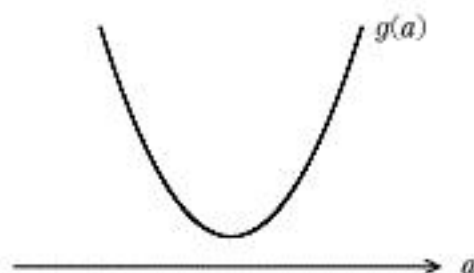
これを a の 2 次関数とみて $g(a)$ とおく.

$g(a)$ の判別式を D_2 として

$$\begin{aligned}\frac{D_2}{4} &= (-6 - 2\sqrt{5})^2 - 3(19 + 8\sqrt{5}) \\ &= -1 < 0\end{aligned}$$

ゆえに $g(a)$ のグラフは図のようになり, すべての実数 a に対して

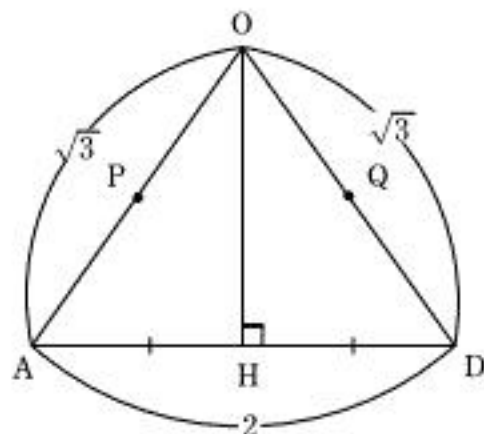
$g(a) > 0$ である. (終)



1 辺が 2 の立方体の対角線より

$AG = DF = 2\sqrt{3}$ であり、 O は AG, DF の中点だから

$OA = OD = \sqrt{3}$ である。以下 $\triangle OAD$ を考える。



まず $\triangle OAH$ で $OH = \sqrt{2}$ より

$$\triangle OAD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

である。 $AP = x$ とおくと

$$OP = \sqrt{3} - x$$

$$OQ = 2AP - 1 = 2x - 1$$

である。 x の変域を求める。

P, Q はそれぞれ線分 OA, OD の O を除く部分にあるから

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 < OP \leq \sqrt{3} \\ 0 < OQ \leq \sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 0 < \sqrt{3} - x \leq \sqrt{3} \\ 0 < 2x - 1 \leq \sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} < x \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \dots\dots ① \end{aligned}$$

①が x の変域である。

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &= \triangle OAD \cdot \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OQ}{OD} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} (\sqrt{3} - x)(2x - 1) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - x)(2x - 1) \\ &= -2x^2 + (2\sqrt{3} + 1)x - \sqrt{3} \\ &= -2 \left(x - \frac{2\sqrt{3} + 1}{4} \right)^2 + \frac{13}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$x = \frac{2\sqrt{3} + 1}{4}$ は①を満たすから

このとき $\triangle OPQ$ は最大値

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{13}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{13\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (\text{答})$$

をとる。

$n^{2018} + 2$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数である.

(I) mod.2 で

- ・ $n \equiv 0$ なら $n^{2018} + 2 \equiv 0$ となり適する.
- ・ $n \equiv 1$ なら $n^{2018} + 2 \equiv 1$ となり不適.

(II) mod.3 で

- ・ $n \equiv 0$ なら $n^{2018} + 2 \equiv 2$ となり不適.
- ・ $n \equiv 1$ なら $n^{2018} + 2 \equiv 0$ となり適する.
- ・ $n \equiv 2 \equiv -1$ なら $n^{2018} + 2 \equiv (-1)^{2018} + 2 = 3 \equiv 0$ となり適する.

以上より

$$n \equiv 2 \pmod{2} \text{ かつ } n \equiv 1, 2 \pmod{3}$$

すなわち

$$n \equiv 2, 4 \pmod{6}$$

が適するものである.

$n \geq 2017$ の下では, 小さい順に

$$n = 2018, 2020, 2024, \dots$$

となるから, 求めるものは

$$n = 2024 \quad (\text{答})$$

点数 確率

$$50 \text{ 点 } \frac{1}{n}$$

$$10 \text{ 点 } \frac{1}{n}$$

$$0 \text{ 点 } \frac{n-2}{n}$$

50 点が何回あるかに着目して考える.

(1) 4 回目に初めて 100 点になるのは

4 回中, 50 点が 2 回, 0 点が 2 回であり, かつ 4 回目が 50 点である
ときだから

$$\begin{aligned} P(4) &= {}_3C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^2 \\ &= \frac{3(n-2)^2}{n^4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 6 回目に初めて 100 点になるのは次の 2 つの場合である.

(I) 6 回中, 50 点が 2 回, 0 点が 4 回であり, かつ 6 回目が 50 点である.

(II) 6 回中, 50 点が 1 回, 10 点が 5 回である.

これらは排反だから

$$\begin{aligned} P(6) &= {}_5C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^4 + {}_6C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^1 \left(\frac{1}{n} \right)^5 \\ &= \frac{5(n-2)^4 + 6}{n^6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 11 回目に初めて 100 点になるのは次の 3 つの場合である.

(I) 11 回中, 50 点が 2 回, 0 点が 9 回であり, かつ 11 回目が 50 点である.

(II) 11 回中, 50 点が 1 回, 10 点が 5 回, 0 点が 5 回であり, かつ 11 回目が 0 点以外である.

(III) 11 回中, 10 点が 10 回, 0 点が 1 回であり, かつ 11 回目が 10 点である.

これらはどの 2 つも排反である.

(I) の確率は

$${}_{10}C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^9 = \frac{10(n-2)^9}{n^{11}}$$

(II) は, 11 回目が 50 点なら ${}_{10}C_5 = 252$ 通り, 11 回目が 10 点なら ${}_{10}C_1 \cdot {}_9C_4 = 10 \cdot 126 = 1260$ 通り,

合わせて $252 + 1260 = 1512$ 通り, 確率は

$$1512 \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^5 \left(\frac{n-2}{n} \right)^5 = \frac{1512(n-2)^5}{n^{11}}$$

(III) の確率は

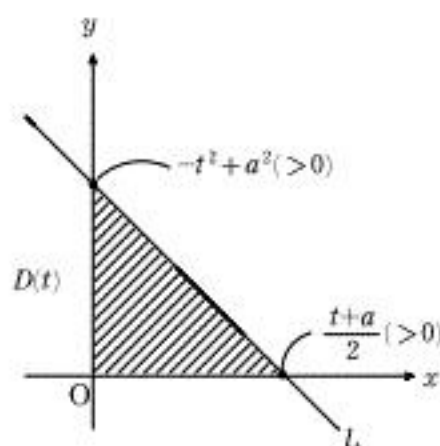
$${}_{10}C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^{10} \left(\frac{n-2}{n} \right) = \frac{10(n-2)}{n^{11}}$$

以上より

$$P(11) = \frac{10(n-2)^9 + 1512(n-2)^5 + 10(n-2)}{n^{11}} \quad (\text{答})$$

- (1) $y = (x-a)^2$ について, $y' = 2(x-a)$ より,
 $x = t$ での接線 l_t は

$$\begin{aligned} y &= 2(t-a)(x-t) + (t-a)^2 \\ &= 2(t-a)x - t^2 + a^2 \end{aligned}$$



領域 $D(t)$ は図のようになり, その面積 $f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t+a}{2} \cdot (-t^2 + a^2) \\ &= -\frac{1}{4}(t+a)^2(t-a) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) $f'(t) = -\frac{1}{4}(t+a)(3t-a)$ より $0 \leq t < a$ での $f(t)$ の増減は次のようになる.

t	0	...	$\frac{a}{3}$	...	a
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{8}{27}a^3$	↘	

ゆえに

$$\text{最大値 } \frac{8}{27}a^3, t = \frac{a}{3} \quad (\text{答})$$

- (3) <STEP1> まず t を固定して s だけ動かすことを考える.

$$l_t: y = 2(t-a)x - t^2 + a^2$$

$$l_s: y = 2(s-a)x - s^2 + a^2$$

$s \neq t$ のとき, l_t と l_s の交点の x 座標は $\frac{s+t}{2}$ であり,

$D(s) \cap \overline{D(t)}$ の面積 $g(s)$ は

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{2}(-s^2 + t^2) \cdot \frac{s+t}{2} \\ &= -\frac{1}{4}(s+t)^2(s-t) \end{aligned}$$

である. (この結果は $s = t$ でも成り立つ.)

これは(1)の $f(t)$ と同じ形の関数だから,

$0 \leq s \leq t$ において

$$s = \frac{t}{3} \text{ で最大値 } \frac{8}{27}t^3$$

をとる. ゆえに $D(t) \cup D(s)$ の面積の最大値 M は

$$M = f(t) + \frac{8}{27}t^3 \quad \left(s = \frac{t}{3}\right)$$

である.

<STEP2> 次に t を動かして, M の最大値を求める.

$M = M(t)$ として

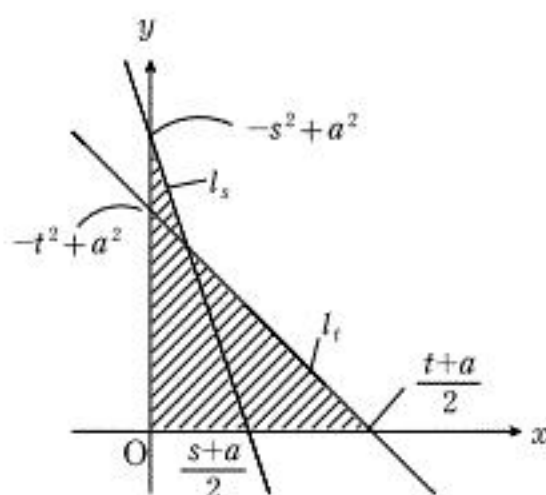
$$\begin{aligned} M'(t) &= f'(t) + \frac{8}{9}t^2 \\ &= \frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a) \end{aligned}$$

$0 \leq t < a$ での $M(t)$ の増減は次のようになる.

t	0	...	$\frac{3a}{5}$	...	a
$M'(t)$		+	0	-	
$M(t)$		↗	$\frac{8}{25}a^3$	↘	

ゆえに, $s = \frac{t}{3}$ も用いて

$$\text{最大値 } \frac{8}{25}a^3, s = \frac{a}{5}, t = \frac{3a}{5} \quad (\text{答})$$



- (1) 数列 $\{c_k\}$ は、6で割ると1余り、かつ4で割ると3余るような自然数を小さい順に並べたものである。

6と4の最小公倍数は12だから、 $\{c_k\}$ は初項7、公差12の等差数列であり

$$c_k = 12k - 5 \quad (\text{答})$$

(2)

6で割ると1余る $\iff$ 12で割った余りが1か7

4で割ると3余る $\iff$ 12で割った余りが3か7か11

であることに注意すると、数列 $\{d_i\}$ は12で割った余りが1か3か7か11であるような自然数を小さい順に並べたものである。

$$\underbrace{1, 3, 7, 11}_{1 \text{ 群}} \mid \underbrace{13, 15, 19, 23}_{2 \text{ 群}} \mid \cdots$$

のように数列 $\{d_i\}$ を群に分ける。

d_{1000} は第250群の4番目だから

$$11 + 12 \times 249 = 2999 \quad (\text{答})$$

d_{1001} は第251群の1番目だから

$$1 + 12 \times 250 = 3001 \quad (\text{答})$$

- (1) 数列 $\{c_k\}$ は、6 で割ると 1 余り、かつ 4 で割ると 3 余るような自然数を小さい順に並べたものである。

6 と 4 の最小公倍数は 12 だから、 $\{c_k\}$ は初項 7、公差 12 の等差数列であり

$$c_k = 12k - 5 \quad (\text{答})$$

(2)

$$6 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る} \iff 12 \text{ で割った余りが } 1 \text{ か } 7$$

$$4 \text{ で割ると } 3 \text{ 余る} \iff 12 \text{ で割った余りが } 3 \text{ か } 7 \text{ か } 11$$

であることに注意すると、数列 $\{d_l\}$ は 12 で割った余りが 1 か 3 か 7 か 11 であるような自然数を小さい順に並べたものである。

$$\underbrace{1, 3, 7, 11}_{1 \text{ 群}} \mid \underbrace{13, 15, 19, 23}_{2 \text{ 群}} \mid \cdots$$

のように数列 $\{d_l\}$ を群に分ける。

第 i 群の 1 番目は

$$d_{4i-3} = 1 + 12(i-1) = 12i - 11$$

第 i 群の 2 番目は

$$d_{4i-2} = 3 + 12(i-1) = 12i - 9$$

第 i 群の 3 番目は

$$d_{4i-1} = 7 + 12(i-1) = 12i - 5$$

第 i 群の 4 番目は

$$d_{4i} = 11 + 12(i-1) = 12i - 1$$

以上より $\{d_l\}$ の一般項は

$$\begin{cases} d_{4i-3} = 12i - 11 \\ d_{4i-2} = 12i - 9 \\ d_{4i-1} = 12i - 5 \\ d_{4i} = 12i - 1 \\ (i = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(注) $l = 4i - 3$ のとき

$$d_l = 12 \cdot \frac{l+3}{4} - 11 = 3l - 2$$

$l = 4i - 2$ のとき

$$d_l = 12 \cdot \frac{l+2}{4} - 9 = 3l - 3$$

$l = 4i - 1$ のとき

$$d_l = 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 5 = 3l - 2$$

$l = 4i$ のとき

$$d_l = 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 = 3l - 1$$

ゆえに l を 4 で割った余りを r として

$$d_l = \begin{cases} 3l - 2 & (r = 1) \\ 3l - 3 & (r = 2) \\ 3l - 2 & (r = 3) \\ 3l - 1 & (r = 0) \end{cases} \quad (\text{答})$$

と表現することもできる。

- (3) 上に続けて、第 i 群の項の和 T_i は

$$T_i = (12i - 11) + (12i - 9) + (12i - 5) + (12i - 1) = 48i - 26$$

である。 S_l について l を 4 で割った余りで分類して考える。

・ $l = 4N$ ($N = 1, 2, \cdots$) のとき。

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{i=1}^N T_i \\ &= \frac{22 + (48N - 26)}{2} \cdot N \\ &= (24N - 2)N \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ &= \left(24 \cdot \frac{l}{4} - 2 \right) \cdot \frac{l}{4} \\ &= \frac{1}{2}l(3l - 1) \end{aligned}$$

・ $l = 4N + 1$ ($N = 0, 1, \cdots$) のとき。

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{i=1}^{4N} d_i + d_{4N+1} \\ &= \textcircled{1} + (12N + 1) \\ &= 24N^2 + 10N + 1 \end{aligned}$$

であり、この結果は $N = 0$ でも成り立つ。

$$N = \frac{l-1}{4} \text{ を代入して整理すると}$$

$$S_l = \frac{1}{2}l(3l - 1)$$

以下同様にして

・ $l = 4N + 2$ ($N = 0, 1, \cdots$) のとき。

$$\begin{aligned} S_l &= (24N^2 + 10N + 1) + (12N + 3) \\ &= 24N^2 + 22N + 4 \\ &= \frac{1}{2}(3l + 2)(l - 1) \end{aligned}$$

・ $l = 4N + 3$ ($N = 0, 1, \cdots$) のとき。

$$\begin{aligned} S_l &= (24N^2 + 22N + 4) + (12N + 7) \\ &= 24N^2 + 34N + 11 \\ &= \frac{1}{2}(3l + 2)(l - 1) \end{aligned}$$

以上より l を 4 で割った余りを R として

$$S_l = \begin{cases} \frac{1}{2}l(3l - 1) & (R = 0, 1) \\ \frac{1}{2}(3l + 2)(l - 1) & (R = 2, 3) \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (1) P から AB に下した垂線の足を H とし,
 $PA = a, PB = b$ とおく,
 $\triangle PAB \sim \triangle HAP \sim \triangle HPB$ より相似比を用いて

$$AH = PA \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$BH = PB \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$PH = PA \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ゆえに $AH : BH = a^2 : b^2$ であり

$$\overrightarrow{PH} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \overrightarrow{PA} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \overrightarrow{PB}$$

また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= -\frac{BC}{PH} \overrightarrow{PH} = -\frac{a^2 + b^2}{ab} \overrightarrow{PH} \\ &= -\frac{b}{a} \overrightarrow{PA} - \frac{a}{b} \overrightarrow{PB} \\ &= -\alpha \overrightarrow{PA} - \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{PB} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\alpha \overrightarrow{PA} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \overrightarrow{PB} \end{aligned}$$

であり $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ は 1 次独立だから

$$x = -\alpha, y = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (\text{答})$$

- (2) $\alpha > 0$ である.

$$x + y = 1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

ここで

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 2$$

であり, 等号成立条件は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\alpha} \\ \iff \alpha &= 1 \\ \iff PA &= PB \\ \iff P &\text{は正方形 } ABCD \text{ の中心} \end{aligned}$$

ゆえに

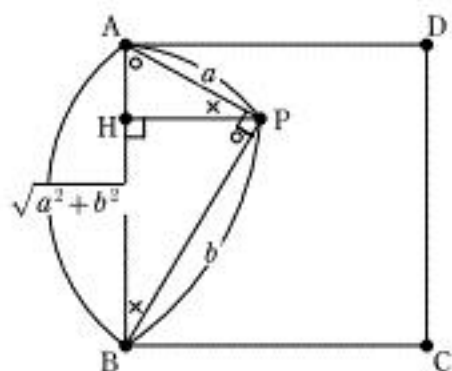
$$\min\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 2$$

であり

$$\max(x + y) = 1 - 2 = -1 \quad (\text{答})$$

このとき

$$P \text{ は正方形 } ABCD \text{ の中心 (対角線の交点)} \quad (\text{答})$$



点数 確率

$$50 \text{ 点 } \frac{1}{n}$$

$$10 \text{ 点 } \frac{1}{n}$$

$$0 \text{ 点 } \frac{n-2}{n}$$

k 回目に初めて 100 点になるのは次の 3 つの場合がある.

(I) k 回中, 50 点が 2 回で残りは 0 点であり, かつ k 回目が 50 点である.

ただし, これが起こり得るのは $k \geq 2$ のとき.

この確率 P_1 は

$$\begin{aligned} P_1 &= {}_{k-1}C_1 \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^{k-2} \\ &= \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} \end{aligned}$$

この結果は $k=1$ でも成り立つ.

(II) k 回中, 50 点が 1 回, 10 点が 5 回で残りは 0 点であり, かつ k 回目が 50 点または 10 点である.

ただし, $k \geq 6$ である.

k 回目が 50 点のものは

$${}_{k-1}C_5 = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-5)}{120} \text{ 通り}$$

k 回目が 10 点のものは

$${}_{k-1}C_1 \cdot {}_{k-2}C_4 = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-5)}{24} \text{ 通り}$$

合わせて

$$\frac{1}{20}(k-1)(k-2)\cdots(k-5) \text{ 通り}$$

確率 P_2 は

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{20}(k-1)(k-2)\cdots(k-5) \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^5 \left(\frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \\ &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-5)(n-2)^{k-6}}{20n^k} \end{aligned}$$

これは $k=1, 2, \dots, 5$ でも成り立つ.

(III) k 回中, 10 点が 10 回で残りは 0 点であり, かつ k 回目が 10 点である.

ただし, $k \geq 10$ である.

この確率 P_3 は

$$\begin{aligned} P_3 &= {}_{k-1}C_9 \left(\frac{1}{n} \right)^{10} \left(\frac{n-2}{n} \right)^{k-10} \\ &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-9)(n-2)^{k-10}}{9!n^k} \end{aligned}$$

これは $k=1, 2, \dots, 9$ でも成り立つ.

(I)(II)(III)はどの 2 つも排反だから

$$\begin{aligned} P(k) = P_1 + P_2 + P_3 &= \frac{1}{n^k} \left\{ (k-1)(n-2)^{k-2} + \frac{1}{20}(k-1)(k-2)\cdots(k-5)(n-2)^{k-6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9!}(k-1)(k-2)\cdots(k-9)(n-2)^{k-10} \right\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(1) $u=t+x$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt \\ &= \int_x^{2x} e^{u-2x} \sin u du \\ &= e^{-2x} \int_x^{2x} e^u \sin u du \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} I &= \int e^u \sin u du \\ J &= \int e^u \cos u du \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int (e^u)' \sin u du \\ &= e^u \sin u - \int e^u \cos u du \\ &= e^u \sin u - J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int (e^u)' \cos u du \\ &= e^u \cos u - \int e^u \cdot (-\sin u) du \\ &= e^u \cos u + I \end{aligned}$$

これらより

$$I = \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + (\text{積分定数})$$

であり

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} \left[\frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) \right]_x^{2x} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) - \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $f(0)=0$ だから、微分の定義より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (2 \cos 2x + 2 \sin 2x) + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \\ &= \cos 2x + \sin 2x - e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0 \quad (\text{答})$$

(別解) $x \neq 0$ の下で

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\text{①}} - \underbrace{\frac{1}{2} e^{-x} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2x} (e^{-x} \cos x - \cos 2x)}_{\text{②}}$$

$x \rightarrow 0$ のとき

$$\text{①} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

また、公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ の利用を考えて

$$\begin{aligned} \text{②} &= \frac{1}{2x} \{ (e^{-x} - 1) \cos x + \cos x - \cos 2x \} \\ &= \frac{1}{2x} \left\{ (e^{-x} - 1) \cos x + 2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{3x}{2} \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (\text{答})$$

1 番目にあるカードは、1 回の試行で、

1, 2, …, n 番目のいずれかにそれぞれ確率 $\frac{1}{n}$ で移る.

m 番目 ($m=2, 3, \dots, n$) にあるカードは、

1 回目の試行で、 m 番目か $m-1$ 番目に移る.

m 番目に移る確率は $\frac{m-1}{n}$,

$m-1$ 番目に移る確率は $\frac{n-m+1}{n}$ である.

(I) C_1 が 2 回後に l 番目にあるのは

次の 3 つの場合に分けられる.

(I) C_1 が 1 回後に 1 番目にあつて 2 回後に l 番目にある.

$$\text{確率は } \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

(II) C_1 が 1 回後に l 番目にあつて 2 回後に l 番目にある.

$$\text{確率は } \frac{1}{n} \cdot \frac{l-1}{n} = \frac{l-1}{n^2}$$

ただし $l=1$ のときは (I) と (II) が重複するから (II) がなくなるが、
確率の式は上のものを用いてよい.

(III) C_1 が 1 回後に $l+1$ 番目にあつて 2 回後に l 番目にある.

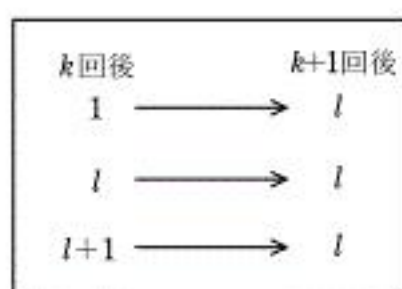
$$\text{確率は } \frac{1}{n} \cdot \frac{n-l}{n} = \frac{n-l}{n^2}$$

$l=n$ のときもこの式でよい.

以上より

$$\begin{aligned} P(2, l) &= \frac{1}{n^2} + \frac{l-1}{n^2} + \frac{n-l}{n^2} \\ &= \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)



(1) と同様にして

$$P(k+1, l) = P(k, 1) \cdot \frac{1}{n} + P(k, l) \cdot \frac{l-1}{n} + \underbrace{P(k, l+1) \cdot \frac{n-l}{n}}_{l=n \text{ のときは } 0} \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ.

任意の k, l に対して $P(k, l) = \frac{1}{n}$ であることを、 k についての
数学的帰納法で示す.

(I) $P(1, l) = \frac{1}{n}$ である.

(II) $P(i, l) = \frac{1}{n}$ (l は任意) であると仮定する.

このとき①を用いると

$$P(i+1, l) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{l-1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-l}{n} = \frac{1}{n}$$

ゆえに $P(i+1, l) = \frac{1}{n}$ である. (答)

以上より $P(k, l) = \frac{1}{n}$ (答)

(3) C_2 が $k+1$ 回後に l 番目にあるのは

次の 2 つの場合に分けられる.

(I) C_2 が 1 回後に 1 番目にあつて $k+1$ 回後に l 番目にある.

$$\text{確率は } \frac{n-1}{n} \cdot P(k, l) = \frac{n-1}{n^2}$$

(II) C_2 が 1 回後に 2 番目にあつて $k+1$ 回後に l 番目にある.

$$\text{確率は } \frac{1}{n} \cdot Q(k, l)$$

ゆえに

$$Q(k+1, l) = \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n} Q(k, l)$$

見やすいように $a_k = Q(k, l)$ とおくと

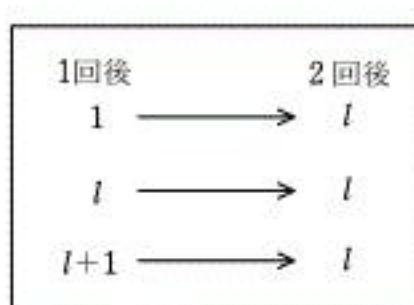
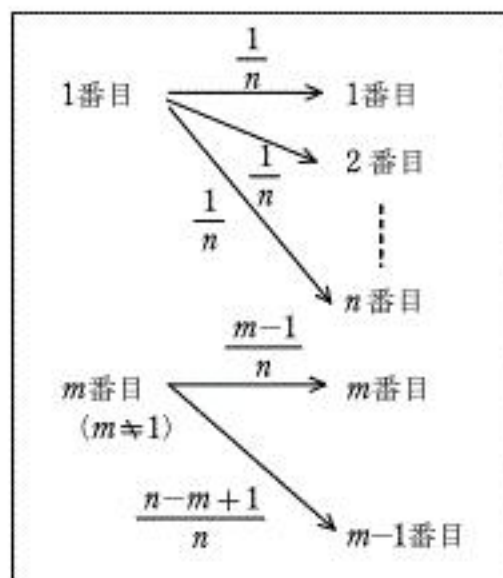
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n} a_k \\ a_{k+1} - \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} \left(a_k - \frac{1}{n} \right) \\ a_k - \frac{1}{n} &= \left(a_1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \\ a_k &= \frac{1}{n} + \left(a_1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

ここで

$$a_1 = Q(1, l) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & (l=1) \\ \frac{1}{n} & (l=2) \\ 0 & (l=3, 4, \dots, n) \end{cases}$$

よって

$$a_k = Q(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} & (l=1) \\ \frac{1}{n} & (l=2) \\ \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} \right)^k & (l=3, 4, \dots, n) \end{cases} \quad (\text{答})$$



(1) $z^9 = 1$ より $z^8 = \frac{1}{z}$ であり

$$\alpha = z + \frac{1}{z}$$

$$\alpha^3 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3} = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\alpha$$

ここで

$$z^3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{1}{z^3} = z^{-3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore z^3 + \frac{1}{z^3} = -1$$

これを代入すると

$$\alpha^3 = -1 + 3\alpha \quad \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$$

ゆえに $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (答)

(2) $|z| = 1$ より $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ で $\bar{z} = \frac{1}{z}$ だから

$$\alpha = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\cos\frac{2\pi}{9}$$

方程式 $f(x) = 0$ の解で $2\cos\theta$ の形のものを考える.

$$f(2\cos\theta) = 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0$$

ここで $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (3倍角公式) より

$$2\cos 3\theta + 1 = 0 \quad \therefore \cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ とすると

$$3\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$$

ゆえに $2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であり,

これらが異なる値であることも考え, この3個が3次方程式 $f(x) = 0$ の

3解である. $\beta = 2\cos\frac{4\pi}{9}, \gamma = 2\cos\frac{8\pi}{9}$ とおく.

$$\beta = z^2 + \bar{z}^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = \alpha^2 - 2$$

$$\gamma = z^4 + \bar{z}^4 = z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2$$

$$= (\alpha^2 - 2)^2 - 2 = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$$

ここで $\alpha^3 = 3\alpha - 1$ より, $\alpha^4 = 3\alpha^2 - \alpha$ だから

$$\gamma = (3\alpha^2 - \alpha) - 4\alpha^2 + 2 = -\alpha^2 - \alpha + 2$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma \text{ については, 解と係数の関係を用いて} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = -\alpha - (\alpha^2 - 2) = -\alpha^2 - \alpha + 2 \\ \text{とすることもできる.} \end{array} \right)$$

以上より, $\alpha^2 - 2, -\alpha^2 - \alpha + 2$ (答)