

数 学

I 2つの方程式

$$x^2 - ax - a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - (a + 2)x - b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

は、それぞれが相異なる実数解をもつ。

(1) a, b の満たす条件を求め、点 (a, b) の領域を図示せよ。

(2) ①の解を α, β , ②の解を γ, δ とし、数直線上に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を座標にもつ点をそれぞれ A, B, P, Q とする。これらの点は A, P, B, Q の順に並び、

$$AP : PB = AQ : BQ$$

を満たしている。 a, b の満たす関係式を求め、図示せよ。

II 複素数平面上において、複素数 z の表す点を P とし、 $w = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + iz)$ の表す点を Q とする。点 P が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、次の問に答えよ。

(1) 点 Q の軌跡を求めよ。

(2) z の偏角を θ とするとき、点 P, Q の距離 PQ を $\sin \theta$ を用いて表せ。

(3) $|\theta| \leq 90^\circ$ のとき、 PQ が最大値、最小値をとるときの $\sin \theta$ の値、およびそのときの PQ の値をそれぞれ求めよ。

III 2つの放物線

$$y = ax^2 + 1, y = bx^2 \quad (a \neq 0, 0 < b, a < b)$$

は、領域 $x > 0$ における交点 P において互いに直交する接線を持ち、それら接線の y 切片の値の和が $\frac{1}{4}$ である。

(1) a, b の値および点 P の座標を求めよ。

(2) これら 2 つの放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。