

# 数 学

I 次の問題の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

関数  $e^{-2x} \sin x$  の不定積分  $\int e^{-2x} \sin x dx$  は、

$$\boxed{\text{ア}} e^{-2x} \sin x + \boxed{\text{イ}} e^{-2x} \cos x + C$$

である。ただし、 $C$  は積分定数とする。

$n$  を整数とすると、 $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$  とおくと、

$$I_n = \boxed{\text{ウ}} e^{-2n\pi} + \boxed{\text{エ}} e^{-2(n+1)\pi}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} I_n = \boxed{\text{オ}}$$

である。

問題 I のア、イ、ウ、エの解答群

- |                 |                  |                  |                  |                  |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| ㉑ $-2$          | ㉒ $-1$           | ㉓ $0$            | ㉔ $1$            | ㉕ $2$            |
| ㉖ $3$           | ㉗ $-\frac{3}{5}$ | ㉘ $-\frac{2}{5}$ | ㉙ $-\frac{1}{5}$ | ㉚ $\frac{1}{5}$  |
| ㉛ $\frac{2}{5}$ | ㉜ $\frac{3}{5}$  | ㉝ $-\frac{5}{3}$ | ㉞ $-\frac{2}{3}$ | ㉟ $-\frac{1}{3}$ |
| ㊱ $\frac{1}{3}$ | ㊲ $\frac{2}{3}$  | ㊳ $\frac{5}{3}$  |                  |                  |

問題 I のオの解答群

- |                                             |                                             |                                            |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| ㉑ $1 + e^{-2\pi}$                           | ㉒ $1 + 2e^{-2\pi}$                          | ㉓ $2 + e^{-2\pi}$                          |
| ㉔ $\frac{3 - e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}$  | ㉕ $\frac{2 - e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}$  | ㉖ $\frac{1 + e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}$ |
| ㉗ $\frac{1 + 3e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}$ | ㉘ $\frac{2 + e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}$  | ㉙ $\frac{1 + e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$ |
| ㉚ $\frac{1 + 2e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$ | ㉛ $\frac{1 + 3e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$ | ㉜ $\frac{2 + e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$ |
| ㉝ $\frac{2 + 2e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$ | ㉞ $\frac{5 + e^{-2\pi}}{3(1 - e^{-2\pi})}$  |                                            |

Ⅱ 次の問題の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

$xyz$  空間において、 $A(2, 2, 2)$ を中心とする半径2の球面

$$S: (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$$

および、 $B(0, 0, 1)$ を通り、方向ベクトルが $(k, 2-k, 1)$ の直線 $l$ を考える。

(1) 直線 $l$ が球面 $S$ と、異なる2点 $P, Q$ で交わるような $k$ の値の範囲は、

$< k <$   である。

(2)  $k$ が(1)の範囲を動くとき、線分 $PQ$ の長さは $k =$   のとき最大で、

最大値は  である。

(3) また、三角形 $APQ$ の面積は $k =$   のとき最大で、最大値は

である。

### 問題Ⅱの解答群

- |                               |                              |                               |                               |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ㉑ $-4$                        | ㉒ $-3$                       | ㉓ $-2$                        | ㉔ $-1$                        |
| ㉕ $0$                         | ㉖ $1$                        | ㉗ $2$                         | ㉘ $3$                         |
| ㉙ $4$                         | ㉚ $5$                        | ㉛ $-\sqrt{2}$                 | ㉜ $\sqrt{2}$                  |
| ㉝ $2\sqrt{2}$                 | ㉞ $\frac{4 \pm \sqrt{3}}{4}$ | ㉟ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$      | ㊱ $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ |
| ㊲ $\frac{7 \pm \sqrt{14}}{7}$ | ㊳ $2\sqrt{15}$               | ㊴ $\frac{5 \pm \sqrt{15}}{5}$ | ㊵ $\frac{2\sqrt{30}}{3}$      |

Ⅲ  $n$  を正の整数とし,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1)  $f_n(2) < 0$ であることを示せ。
- (2) 方程式  $f_2(x) = 0$  は  $0 < x < 2$  の範囲にただ一つだけ解をもつことを示せ。
- (3)  $n \geq 3$  のときも、方程式  $f_n(x) = 0$  は  $0 < x < 2$  の範囲にただ一つだけ解をもつことを示せ。

IV  $n$  を正の奇数とする。多項式  $P_n(x)$ ,  $Q_{n-1}(x)$  は、任意の実数  $\theta$  に対して、

$$P_n(\sin \theta) = \sin n\theta, \quad \cos \theta Q_{n-1}(\sin \theta) = \cos n\theta$$

を満たすとする。

(1)  $P_5(x)$  と  $Q_4(x)$  を求めよ。

(2)  $n \geq 3$  に対して、 $P_n(x)$  を  $P_{n-2}(x)$  と  $Q_{n-3}(x)$  を用いて表せ。また、  
 $Q_{n-1}(x)$  を  $P_{n-2}(x)$  と  $Q_{n-3}(x)$  を用いて表せ。

(3)  $P_n(x) = 0$  の解  $x$  は  $-\frac{n}{2} < k < \frac{n}{2}$  なる整数  $k$  によって、 $x = \sin \frac{k\pi}{n}$  と表されることを示せ。

(4)  $\alpha_k = \sin \frac{k\pi}{n}$  とおくとき、 $\lim_{x \rightarrow \alpha_k} \frac{P_n(x)}{x - \alpha_k}$  を求めよ。