

I 次の問題の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

3点 $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(3, 5)$ を通る円を C とする。 C のもう一つの x 軸との交点は $(\text{ア}, 0)$, もう一つの y 軸との交点は $(0, \text{イ})$ である。また, C の半径は ウ である。さらに、点 $(13, 0)$ を通る C の接線の傾きは エ , オ ($\text{エ} < \text{オ}$) で与えられる。

問題Iのア、イの解答群

- (a) -20 (b) -16 (c) -12 (d) -8 (e) -4
 (f) 4 (g) 8 (h) 12 (i) 16 (j) 20

問題Iのウの解答群

- (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) $5\sqrt{3}$ (e) $6\sqrt{3}$
 (f) $7\sqrt{3}$ (g) $3\sqrt{5}$ (h) $4\sqrt{5}$ (i) $5\sqrt{5}$

問題Iのエ、オの解答群

- (a) $-\frac{7}{3}$ (b) -2 (c) $-\frac{5}{3}$ (d) $-\frac{3}{2}$ (e) $-\frac{4}{3}$
 (f) -1 (g) $-\frac{2}{3}$ (h) $-\frac{1}{2}$ (i) $-\frac{1}{3}$ (j) $\frac{1}{3}$
 (k) $\frac{1}{2}$ (l) $\frac{2}{3}$ (m) 1 (n) $\frac{4}{3}$ (o) $\frac{3}{2}$
 (p) $\frac{5}{3}$ (q) 2 (r) $\frac{7}{3}$

II 次の問題の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

$$(1) \int \sin x \sin 3x \, dx = \boxed{\text{カ}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \, dx = \boxed{\text{キ}}$$

$$(3) \int \cos x \sin 3x \, dx = \boxed{\text{ク}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x \, dx = \boxed{\text{ケ}}$$

問題IIの力、クの解答群

$$\text{㉑} \quad \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\text{㉒} \quad \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\text{㉓} \quad -\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\text{㉔} \quad -\frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\text{㉕} \quad \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\text{㉖} \quad \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\text{㉗} \quad -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\text{㉘} \quad -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

問題IIのキ、ケの解答群

$$\text{㉑} \quad -\frac{1}{4}$$

$$\text{㉒} \quad -\frac{3}{16}$$

$$\text{㉓} \quad -\frac{1}{8}$$

$$\text{㉔} \quad -\frac{1}{16}$$

$$\text{㉕} \quad \frac{1}{16}$$

$$\text{㉖} \quad \frac{1}{8}$$

$$\text{㉗} \quad \frac{3}{16}$$

$$\text{㉘} \quad \frac{1}{4}$$

$$\text{㉙} \quad -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{㉚} \quad -\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{㉛} \quad -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{㉜} \quad -\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{㉝} \quad \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{㉞} \quad \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{㉟} \quad \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{㊱} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ⅲ $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 関数 $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$ を考える。以下の問に答えよ。

(1) 数学的帰納法を用いて, 次の等式

$$\int_0^x f_n(t) dt = 1 - \{f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\}$$

を証明せよ。ただし, $f_0(x) = e^{-x}$ とする。

(2) $x \geq 0$ における $f_n(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ。

(3) $0 < x < 1$ のとき, $f_1(1-x) < f_1(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(4) $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し, $0 < x < n$ のとき, $f_n(n-x) < f_n(n+x)$ が成り立つことを示せ。

IV 3点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$ を頂点とする三角形 OAB の内部に点 $P(a, b)$ がある。

点 A を中心とする角度 $-\theta_1$ ($0 < \theta_1 < \pi$) の回転により辺 AB が x 軸上に移るとき、この回転により4点 O, A, B, P はそれぞれ $O_1, A_1 = A, B_1, P_1$ に移るとする。

点 B_1 を中心とする角度 $-\theta_2$ ($0 < \theta_2 < \pi$) の回転により辺 O_1B_1 が x 軸上に移るとき、この回転により4点 O_1, A_1, B_1, P_1 はそれぞれ $O_2, A_2, B_2 = B_1, P_2$ に移るとする。

さらに、点 O_2 を中心とする角度 $-\theta_3$ ($0 < \theta_3 < \pi$) の回転により辺 O_2A_2 が x 軸上に移るとき、この回転により4点 O_2, A_2, B_2, P_2 はそれぞれ $O_3 = O_2, A_3, B_3, P_3$ に移るとする。

点 A を中心とした円の弧 $\widehat{PP_1}$ を C_1 、点 B_1 を中心とした円の弧 $\widehat{P_1P_2}$ を C_2 、点 O_2 を中心とした円の弧 $\widehat{P_2P_3}$ を C_3 とする。ただし、円の弧 C_1, C_2, C_3 は第1象限内にとる。

このとき以下の問に答えよ。

- (1) θ_1 を求めよ。
- (2) 円の弧 C_1, C_2, C_3 と線分 OP, O_3P_3 および x 軸とにより囲まれる図形の面積 S を a と b で表せ。
- (3) S が最小となるような点 P の座標 (a, b) を求めよ。

