

I 次の問題文の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(25点)

負でない整数 a, b に対して、整数 $a * b$ を

$a * b = a$ と b の積の下2桁の部分

と定義する。また、

$$a^{*2} = a * a, a^{*3} = a * a * a, \dots, a^{*n} = \overbrace{a * a * \dots * a}^{n \text{ 個}}, \dots$$

と定める。例えば、 $13 * 24 = 12$ であり、 $13^{*2} = 69$ である。このとき、

$39 * 21 = \boxed{\text{ア}}, 51^{*2} = \boxed{\text{イ}}$ である。2桁以下の整数 a を

$$a = 10a_1 + a_0$$

と表す。ただし、 a_0, a_1 は $0 \leq a_0, a_1 \leq 9$ を満たす整数である。このとき、 $a_1 \leq 4$ ならば

$$2 * a = \boxed{\text{ウ}} a_1 + \boxed{\text{エ}} a_0$$

であり、 $5 \leq a_1 \leq 9$ ならば

$$2 * a = \boxed{\text{オ}} * a_1 + \boxed{\text{カ}} a_0$$

となる。

$5 * a = 0$ となる最小の2桁の正整数 a は $a = \boxed{\text{キ}}$ である。 $79 * x = 1$ となる2桁以下の正整数は $x = \boxed{\text{ク}}$ であり、 $9^{*n} = 1$ となる最小の正整数 n は $n = \boxed{\text{ケ}}$ である。

問題Iの解答群

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| (a) 0 | (b) 1 | (c) 2 | (d) 3 |
| (e) 4 | (f) 5 | (g) 6 | (h) 7 |
| (i) 8 | (j) 9 | (k) 10 | (l) 11 |
| (m) 12 | (n) 13 | (o) 14 | (p) 15 |
| (q) 16 | (r) 17 | (s) 18 | (t) 19 |
| (u) 20 | | | |

Ⅱ 次の問題文の空欄に適する答を解答群から選び、その記号をマークシートに記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(25点)

関数 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくとき、 $a_0 = \boxed{\text{コ}}$ 、 $a_1 = \boxed{\text{サ}}$ 、 $a_2 = \boxed{\text{シ}}$ となる。いま

$$g(x) = f(x) - a_0 - a_1 \cos x - a_2 \cos 2x$$

とおき、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $g(x)$ がとりうる値の範囲を調べたい。

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において $g''(x) = 0$ の解は $x = \pm \boxed{\text{ス}}$ であり、

$g'(-\frac{\pi}{2}) = \boxed{\text{セ}}$ 、 $g'(\frac{\pi}{2}) = \boxed{\text{ソ}}$ であるから $g'(x) = 0$ の

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における解は $x = \boxed{\text{タ}}$ のみであることが分かる。従って、

$g(x)$ は $x = \pm \boxed{\text{チ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ツ}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{テ}}$ で最小値

$\boxed{\text{ト}}$ をとる。

問題Ⅱのコ、サ、シの解答群

- | | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| ① -2π | ② 2π | ③ $-\frac{1}{2}\pi$ | ④ $\frac{1}{2}\pi$ |
| ⑤ -2 | ⑥ 2 | ⑦ $-\frac{1}{2}$ | ⑧ $\frac{1}{2}$ |
| ⑨ $\frac{\pi}{3}$ | ⑩ $\frac{2\pi}{3}$ | ⑪ $\frac{\pi^2}{3}$ | ⑫ $\frac{2\pi^2}{3}$ |

問題Ⅱのス、セ、ソ、タ、チ、ツ、テ、トの解答群

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ⑬ -3π | ⑭ $-\pi$ | ⑮ 0 |
| ⑯ $\frac{\pi}{6}$ | ⑰ $\frac{\pi}{4}$ | ⑱ $\frac{\pi}{3}$ |
| ⑲ $\frac{\pi}{2}$ | ⑳ π | ㉑ 3π |
| ㉒ $-\pi + 2$ | ㉓ $\pi - 2$ | ㉔ $-\frac{2\pi^2}{3} - \frac{3}{2}$ |
| ㉕ $-\frac{2\pi^2}{3} + \frac{3}{2}$ | ㉖ $-\frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{2}$ | ㉗ $-\frac{\pi^2}{3} + \frac{3}{2}$ |
| ㉘ $-\frac{5\pi^2}{12} + \frac{1}{2}$ | ㉙ $-\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}$ | ㉚ -2 |
| ㉛ 2 | | |

Ⅲ 空間の3点を $A(-1, 0, 1)$, $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $Q(-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$
($0 \leq \theta \leq 2\pi$)とおき、点Aから直線PQへおろした垂線の足をHとおく。以下の問に答えよ。(25点)

(1) θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動くとき、Hの軌跡の方程式を求めよ。

(2) θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動くとき、 $\triangle APQ$ の周の長さ ℓ の最大値を求めよ。

Ⅳ 正の定数 a に対し, $x > 0$ における関数 $f_a(x) = \log x + a$ を考える。直線 $y = x$ に関して曲線 $C_1: y = f_a(x)$ と対称な曲線を $C_2: y = g_a(x)$ とおく。以下の問に答えよ。(25 点)

(1) 関数 $g_a(x)$ を求めよ。

(2) x についての方程式 $f_a(x) = g_a(x)$ がただ一つの解をもつような a の値と, そのときの x の値を求めよ。

(3) $f_a(x) = g_a(x)$ が異なる二つの解をもつための a の条件を求めよ。さらにこのとき, 曲線 C_1 と C_2 の二つの交点を $A(x_1, y_1)$ および $B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) とし, 二本の曲線 C_1 と C_2 によって囲まれた領域に内接する四角形 AQBP (ただし, 頂点 P は曲線 C_1 上, Q は曲線 C_2 上にとる) の面積 S が最大となるときの線分 PQ の長さを a を用いて表せ。