

I

$$y=3x \quad \cdots \textcircled{1}, \quad y=-3x \quad \cdots \textcircled{2}$$

(1) $\textcircled{1}$ と $y=n=3m+k$ ($m=0, 1, 2, \dots, k=0, 1, 2$) を連立する

$$\text{と } x=m+\frac{k}{3}, \quad \textcircled{2} \text{と } y=n \text{ を連立すると } x=-m-\frac{k}{3}$$

$$y \geq 3x \text{ かつ } y \geq -3x \text{ かつ } y=n \text{ のとき } -m-\frac{k}{3} \leq x \leq m+\frac{k}{3}$$

$$0 \leq \frac{k}{3} < 1 \text{ より, これをみたす整数 } x \text{ は, } -m, -m+1, \dots,$$

$$-1, 0, 1, \dots, m-1, m \text{ の } 2m+1 \text{ 個ある。} \quad \therefore a_{3m+k} = \underline{\underline{2m+1}}$$

$$(2) \quad S(3m+k) = 3 \sum_{j=1}^m (2j-1) + (k+1)(2m+1)$$

$$= 3 \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) - m \right\} + (k+1)(2m+1)$$

$$= \underline{\underline{3m^2 + (k+1)(2m+1)}}$$

(3) (2)を用いて $8=3 \times 2+2$ より $m=2, k=2$ として,

$$S(8) = 3 \cdot 2^2 + (2+1)(2 \cdot 2+1) = 27$$

$$S(100) = S(3 \times 33+1) = 3 \cdot 33^2 + (1+1)(2 \cdot 33+1) = 3401$$

II

$$(1) \quad x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } 45^\circ \leq \theta + 45^\circ \leq 225^\circ$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(\theta + 45^\circ) \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$(2) \quad x^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

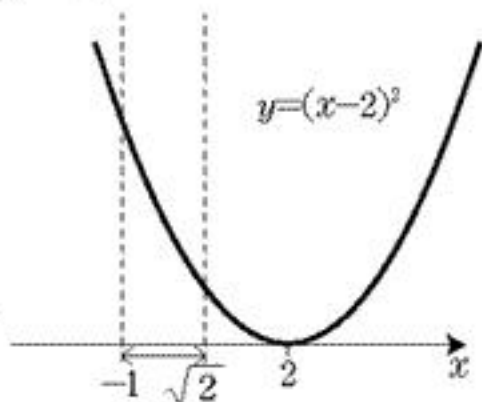
$$(3) \quad f(\theta) = x^2 - 1 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$x = -1$ のとき,

$$f(\theta) \text{ の最大値は } (-1 - 2)^2 = \underline{\underline{9}}$$

$x = \sqrt{2}$ のとき,

$$f(\theta) \text{ の最小値は } (\sqrt{2} - 2)^2 = \underline{\underline{6 - 4\sqrt{2}}}$$



Ⅲ

(1) 放物線 $y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$ の頂点

$\left(\frac{p}{2}, q + \frac{p^2}{4}\right)$ は $y = 3x - 4$ 上の点だから、

$$q + \frac{p^2}{4} = 3 \cdot \frac{p}{2} - 4 \quad \therefore q = -\frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}p - 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + px - \frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}p - 4 & \dots \textcircled{2} \\ y = x^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

連立すると

$$x^2 = -x^2 + px - \frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}p - 4$$

$$\therefore 2x^2 - px + \frac{p^2}{4} - \frac{3}{2}p + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

②, ③は相異なる2点で交わるから、

$$\textcircled{4} \text{の判別式: } D = p^2 - 8\left(\frac{p^2}{4} - \frac{3}{2}p + 4\right) = -(p^2 - 12p + 32)$$

$$= -(p-4)(p-8) > 0$$

$$\therefore \underline{\underline{4 < p < 8}}$$

(2) $4 < p < 8$ として、④の2解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\alpha = \frac{p - \sqrt{D}}{4}$$

$$\beta = \frac{p + \sqrt{D}}{4} \text{ より } \beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left(-x^2 + px - \frac{p^2}{4} + \frac{3}{2}p - 4 - x^2\right) dx$$

$$= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^3 = \frac{1}{24} D^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{24} (-p^2 + 12p - 32)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{24} \{-(p-6)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}}$$

$4 < p < 8$ より、 S は $\underline{\underline{p=6}}$ のとき最大値 $\frac{1}{24} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

①より、このとき $\underline{\underline{q=-4}}$