

I

- (1) 大文字から始まり，大文字と小文字を交互に並べる順列だから，
大文字のみの順列と小文字のみの順列に分けてよく，

$$4! 3! = 144 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (2) まず $\{a, b, c\}$, W, X, Y, Z の 5 つを並べ，次に a, b, c の
3 文字を並べると考えて，

$$5! 3! = 720 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (3) 余事象は a, b, c のどの 2 文字も隣り合わない場合で，小文字
が大文字の間に入るかまたは端に入ると考え，
さらに大文字の順列を考えると，



$${}_5P_3 \cdot 4! \text{ (通り)}$$

これが余事象となるから，もとの順列は，

$$7! - {}_5P_3 \cdot 4! = 3600 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

II

$$\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}, \quad \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を各々 2 乗して加えると,

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y + \sin^2 y + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = 1$$

$$\therefore \cos(x+y) = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq x+y \leq 720^\circ$ より $x+y = 120^\circ, 240^\circ, 480^\circ, 600^\circ$

(i) $x+y = 120^\circ$ のとき, ①より

$$\sin x - \sin(120^\circ - x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$-60^\circ \leq x - 60^\circ \leq 300^\circ$ より $x - 60^\circ = 30^\circ, 150^\circ$

このうち $0^\circ \leq y \leq 360^\circ$, ②をみたすのは $x = 90^\circ, y = 30^\circ$

(ii) $x+y = 240^\circ$ のとき, ①より

$$\sin x - \sin(240^\circ - x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$60^\circ \leq x + 60^\circ \leq 420^\circ$ より $x + 60^\circ = 150^\circ, 390^\circ$, $0^\circ \leq y \leq 360^\circ$, ②をみたすものはない。

(iii) $x+y = 480^\circ$ のとき, (i)と同様にして,

$x - 60^\circ = 30^\circ, 150^\circ$, $0^\circ \leq y \leq 360^\circ$, ②をみたすものはない。

(iv) $x+y = 600^\circ$ のとき, (ii)と同様にして,

$x + 60^\circ = 150^\circ, 390^\circ$, このうち, $0^\circ \leq y \leq 360^\circ$, ②をみたすのは, $x = 330^\circ, y = 270^\circ$

以上より, $(x, y) = (90^\circ, 30^\circ), (330^\circ, 270^\circ) \quad \cdots$ (答)

Ⅲ

(1) 問題の条件から,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 4x + 4y = 4k \end{cases} \quad \therefore x + y = k$$

$$\text{これより, } 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$$

$$= k^2 - a^2 \quad \therefore xy = \frac{k^2 - a^2}{2}$$

$$\text{よって, } V(k) = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= k^3 - 3 \cdot \frac{k^2 - a^2}{2} \cdot k = -\frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}a^2k \quad \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad \left(\frac{k}{2} + r\right)^2 + \left(\frac{k}{2} - r\right)^2 = \frac{k^2}{2} + 2r^2 \quad \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad x + y = k, \quad xy = \frac{1}{2}(k^2 - a^2) \text{ より,}$$

x, y は 2 次方程式 $t^2 - kt + \frac{1}{2}(k^2 - a^2) = 0$ の 2 解で, この 2 次方程式は 2 実数解を $t > 0$ の範囲にもつから,

$$D = k^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(k^2 - a^2) = -k^2 + 2a^2 \geq 0,$$

$$x + y = k > 0, \quad xy = \frac{1}{2}(k^2 - a^2) > 0$$

$$\text{より } a < k \leq \sqrt{2}a \quad \cdots (\text{答})$$

$$(4) \quad V'(k) = -\frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}a^2 = -\frac{3}{2}(k^2 - a^2) \text{ より,}$$

(3)の範囲ではつねに $V'(k) < 0$ となるから, $V(k)$ の最小値は,

$$V(\sqrt{2}a) = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \quad \cdots (\text{答})$$