

- (1) $\omega = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ であるから $\omega^3 = 1$ となり,
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ をみたす。解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \omega + \omega^2 = -p \\ \omega \cdot \omega^2 = q \end{cases}$$

よって,
$$\begin{cases} p = -(\omega + \omega^2) = 1 \\ q = \omega^3 = 1 \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) (左辺) $= a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc$

(右辺) $= a^2 + (sb+tc+ub+vc)a + (sb+tc)(ub+vc)$

となるから, a について恒等式とみると,

$$\begin{cases} -b-c = (s+u)b + (t+v)c \\ b^2 + c^2 - bc = sub^2 + tvc^2 + (sv+ut)bc \end{cases}$$

さらに, この2つを b についての恒等式とみると,

$$\begin{cases} s+u = -1 & \dots \text{①} \\ t+v = -1 & \dots \text{②} \end{cases} \quad \begin{cases} su = 1 & \dots \text{③} \\ tv = 1 & \dots \text{④} \\ sv+ut = -1 & \dots \text{⑤} \end{cases}$$

(1)の考察から, ①, ③より, $(s, u) = (\omega, \omega^2)$ または (ω^2, ω)

同様に, ②, ④より, $(t, v) = (\omega, \omega^2)$ または (ω^2, ω)

この中で⑤をみたす組は,

$(s, t, u, v) = (\omega, \omega^2, \omega^2, \omega)$ または $(\omega^2, \omega, \omega, \omega^2) \quad \dots \text{ (答)}$

II

- (1) 1人につきA, Bの2通りの入り方があるから,

$$2^{10} = 1024 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (2) (1)の場合から, 10人がAのみに入る場合とBのみに入る場合を除いたものだから,

$$1024 - 2 = 1022 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (3) 10人がAのみに入る場合だから,

$$1 \text{ 通り} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (4) (2), (3)を利用して,

$$3^{10} - 3 \cdot 1022 - 3 \cdot 1 = 55980 \text{ (通り)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

Ⅲ

- (1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$ より, $a=0$ のとき $f(x)$ は極値をもたない。

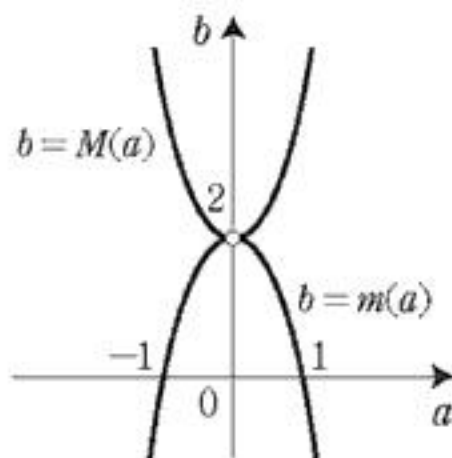
また, $f(x)$ は a の符号によらないから, $a \neq 0$ のとき, $f(x)$ は $x = -|a|$ で極大, $x = |a|$ で極小となる。よって,

$$\begin{cases} \text{極大値: } f(-|a|) = 2|a|^3 + 2 \\ \text{極小値: } f(|a|) = -2|a|^3 + 2 \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

- (2) (1)より,

$$\begin{cases} M(a) = 2|a|^3 + 2 \\ m(a) = -2|a|^3 + 2 \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

となるが, $a < 0$ の部分は $a > 0$ の部分と b 軸に関して対称だから, グラフは右図のようになる。((0, 2) は含まない。)



- (3) (i) $a=0$ のとき, $f(x) = x^3 + 2$ となるから, $f(x) = 0$ の実数解の個数は 1。

- (ii) $a \neq 0$ のとき, $f(x)$ が 3 次関数であり, 極大値が $M(a) > 0$ となることから,

$$\begin{cases} m(a) > 0 \text{ のとき, つまり } |a| < 1 \text{ のとき 1 個} \\ m(a) = 0 \text{ のとき, つまり } |a| = 1 \text{ のとき 2 個} \\ m(a) < 0 \text{ のとき, つまり } |a| > 1 \text{ のとき 3 個} \end{cases}$$

- (i), (ii)より, $\begin{cases} |a| < 1 \text{ のとき 1 個} \\ |a| = 1 \text{ のとき 2 個} \\ |a| > 1 \text{ のとき 3 個} \end{cases} \quad \cdots \text{ (答)}$