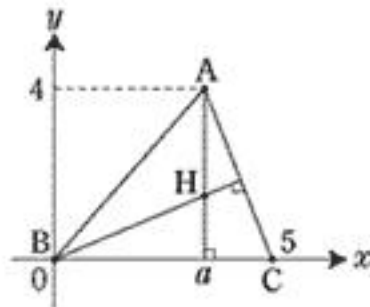


I

(1) 重心 G:

$$\frac{1}{3}\{(a, 4) + (0, 0) + (5, 0)\}$$

$$= \left(\frac{a+5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$



直線 AC の傾きは, $a \neq 5$ のとき $\frac{4}{a-5}$

直線 AC に垂直な直線の傾きは, $a = 5$ のときも含めて $\frac{5-a}{4}$

直線 BH: $y = \frac{5-a}{4}x$

$x = a$ として, $y = \frac{a(5-a)}{4}$ 重心 $H\left(a, \frac{a(5-a)}{4}\right)$

(2) 両三角形は底辺共通で, 高さ (G, H の y 座標) の比が 16:9

$$\therefore \frac{4}{3} : \frac{|a(5-a)|}{4} = 16:9$$

$$\therefore \frac{|a(5-a)|}{4} \cdot 16 = \frac{4}{3} \cdot 9 \quad \therefore |a(a-5)| = 3$$

i) $a < 0, 5 < a$ のとき,

$$a(a-5) = 3 \quad \text{より} \quad a^2 - 5a - 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \quad (\text{これは } a < 0, 5 < a \text{ を満たす})$$

ii) $0 \leq a \leq 5$ のとき,

$$-a(a-5) = 3 \quad \text{より} \quad a^2 - 5a + 3 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (\text{これは } 0 \leq a \leq 5 \text{ を満たす})$$

以上より
$$a = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}, \quad \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{II} \quad y = x^2 + ax + 1 \cdots \textcircled{1}, \quad y = 2x^2 + x + a \cdots \textcircled{2}$$

$$(1) \quad \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を連立して, } x^2 + ax + 1 = 2x^2 + x + a$$

$$\therefore x^2 + (1-a)x + a-1 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

異なる2点で交わるから,

$$D = (1-a)^2 - 4(a-1) = (a-1)(a-5) > 0$$

$$\therefore \underline{a < 1, 5 < a}$$

$$(2) \quad \textcircled{3} \text{の2解を } \alpha, \beta \text{ として, 交点の座標は, } (\alpha, \alpha^2 + a\alpha + 1) \text{ と } (\beta, \beta^2 + a\beta + 1)$$

$$\text{解と係数の関係より, } \alpha + \beta = a-1, \alpha\beta = a-1$$

2交点の中点を (x, y) として

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}(a-1), \quad a = 2x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}\{(\alpha^2 + a\alpha + 1) + (\beta^2 + a\beta + 1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + a(\alpha + \beta) + 2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-1)^2 - 2(a-1) + a(a-1) + 2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(2x)^2 - 2 \cdot 2x + (2x+1) \cdot 2x + 2\}$$

$$= 4x^2 - x + 1$$

求める方程式は, $y = 4x^2 - x + 1$

[注. (1) より, $a = 2x + 1 < 1, 5 < a = 2x + 1$ だから

$$x < 0, 2 < x]$$

Ⅲ

$$(1) \quad n=1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^n k^2 = 1, \quad \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

よって等式は成り立つ。

$n=m$ のとき等式が成り立つとして, $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$
両辺に $(m+1)^2$ を加えると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 &= \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(m+1)\{2m^2 + m + 6m + 6\} \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + 7m + 6) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)\{2(m+1)+1\} \end{aligned}$$

よって $n=m+1$ のときも等式は成り立つ。

以上, 数学的帰納法により

等式: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} (2) \quad &1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \\ &\quad \cdots + (2n-1)^2 + (2n)^2 - (2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 2^2 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1) - 4 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1 - (2n+2)) \\ &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) \end{aligned}$$