

2004 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 14:30～15:30 60分)

1. この問題は、入学願書提出時に選択した科目の問題です。科目名を確認のうえ、解答してください。
2. 解答用紙は、記述用のみです。
3. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
4. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル（いずれもHB・黒）を使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。
5. 解答用紙には、受験番号と氏名を2か所記入してください。

I 座標平面において、 x 座標も y 座標もともに整数であるような点を格子点という。
 n を負でない整数とし、不等式 $y \geq 3x$, $y \geq -3x$ および $y \leq n$ の表す領域に含まれる格子点の数を $S(n)$ とする。次の問に答えよ。(30 点)

- (1) $y \geq 3x$, $y \geq -3x$ かつ $y = n$ を満たす格子点の数を a_n とする。 $n = 3m + k$ (ただし、 $k = 0$ または 1 または 2 とする) として a_{3m+k} を m で表せ。
- (2) $S(3m + k)$ ($k = 0, 1, 2$) を求めよ。
- (3) $S(8)$, $S(100)$ を求めよ。

II 角度 θ が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲を動くとき、次の問に答えよ。(35 点)

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = x$ とおくとき、 x のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin \theta \cos \theta$ を x で表せ。
- (3) 関数 $f(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta - 4(\sin \theta + \cos \theta) + 5$ の最大値と最小値を求めよ。

III 放物線 $y = -x^2 + px + q$ が直線 $y = 3x - 4$ の上に頂点をもち、放物線 $y = x^2$ と相異なる 2 点で交わるとする。このとき、次の問に答えよ。(35 点)

- (1) 二つの放物線が相異なる 2 点で交わるための p の範囲を求めよ。
- (2) 二つの放物線で囲まれる部分の面積を最大にする p, q の値と、そのときの面積 S を求めよ。ただし、実数 α, β に対する次の等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

を用いてよい。