

$$I (1) y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \dots ①$$

$$① \text{ を微分 } y' = 3x^2 - 12x + 9 \\ = 3(x-3)(x-1)$$

①の増減表は下記の通り

x	...	1	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

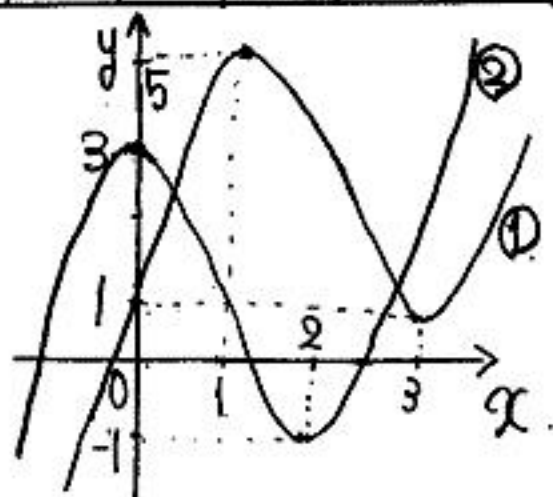
$$y = x^3 - 3x^2 + 3 \dots ②$$

$$② \text{ を微分 } y' = 3x^2 - 6x \\ = 3x(x-2)$$

②の増減表は下記の通り

x	...	0	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

以上より ①、② のグラフは右図のとおり



(2) ①、② より

$$x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$3x^2 - 9x + 2 = 0 \dots ③$$

よって求めるx座標は③を解いて $x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$

$$(3) \frac{9 - \sqrt{57}}{6} = \alpha, \frac{9 + \sqrt{57}}{6} = \beta \text{ とし、}$$

求める面積を S とする。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3) dx$$

$$= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= -3 \left(-\frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \right)$$

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{57}}{3} \text{ より } S = \frac{1}{2} \times \frac{57\sqrt{57}}{27} = \frac{19\sqrt{57}}{18}$$

よって求める面積は $\frac{19\sqrt{57}}{18}$

II. (1) 6を2進展開すると、 $6 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1$
と直せるので、

$$f(6) = 0 + 3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 = 12 //$$

同様に、7を2進展開すると、 $7 = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1$

$$\text{なので、} f(7) = 1 + 3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 = 13 //$$

$$(2) \quad n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^{r-1}a_{r-1} + 2^ra_r \quad \dots (*)$$

と、 n が表されるので、 $2n$ は (*) の両辺を2倍して、

$$2n = 2a_0 + 2^2a_1 + 2^3a_2 + \dots + 2^ra_{r-1} + 2^{r+1}a_r$$

となる。よって、 $2n$ を2進展開したものは、

$$\therefore 2n = 0 + 2a_0 + 2^2a_1 + \dots + 2^ra_{r-1} + 2^{r+1}a_r //$$

(3)

$$2n - f(n) = \underbrace{(2-1)}_1 a_0 + \underbrace{(2^2-3)}_1 a_1 + \underbrace{(2^3-3^2)}_{-1} a_2 + \underbrace{(2^4-3^3)}_{-11} a_3 + \dots + (2^{r+1}-3^r) a_r > 0$$

となる n を求めたい。

ここで $a_0, a_1, \dots, a_r$ は 0 または 1 であるので、

$2n - f(n)$ で、 a_r ($r \geq 3$) の項が出てきたら、

明らかに、 $2n - f(n) < 0$ となってしまうので不適となる。

$2^3 \leq n < 2^4$ のとき、 a_3 の項が出るので、

したがって、 $n \geq 8$ では、 $2n - f(n) < 0$ となり、適さない。

よって、 $1 \leq n \leq 7$ の範囲の n で考えればよく、(1) と同様に

$n = 1, 2, \dots, 7$ で 2進展開を行い、 $f(n)$ ($n = 1, 2, \dots, 7$) を求めると、

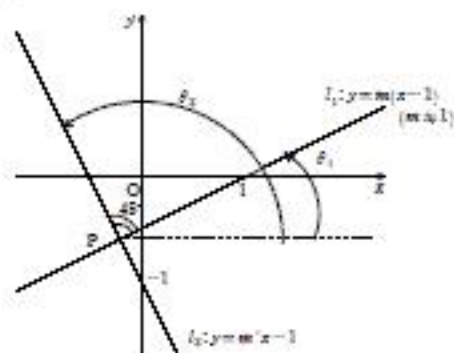
$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 < 2 \cdot 1 = 2 \text{ より、適} \\ f(2) = 3 < 2 \cdot 2 = 4 \text{ より、適} \\ f(3) = 4 < 2 \cdot 3 = 6 \text{ より、適} \\ f(4) = 9 > 2 \cdot 4 = 8 \text{ より、不適} \\ f(5) = 10 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ より、不適} \\ f(6) = 12 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ より、不適} \\ f(7) = 13 < 2 \cdot 7 = 14 \text{ より、適} \end{array} \right.$$

よ 以上より、

$f(n) < 2n$ をみたす自然数 n は、

$$n = 1, 2, 3, 7 //$$

(1)


 $\tan \theta_1 = m, \tan \theta_2 = m'$ とおくと,

$$\begin{aligned}\tan 45^\circ &= \tan(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1} \\ &= \frac{m' - m}{1 + mm'} = 1\end{aligned}$$

$$\therefore m' - m = 1 + mm'$$

$$\therefore (1 - m)m' = 1 + mm'$$

 $m \neq 1$ より

$$\therefore m' = \frac{1 + m}{1 - m}$$

(2) 直線 l_1, l_2 はそれぞれ
 $l_1: y = m(x-1), l_2: y = m'(x-1)$ と表せるので, $P(x, y)$ は, l_1, l_2 より m を消去し, x, y の関係を作ればよい.

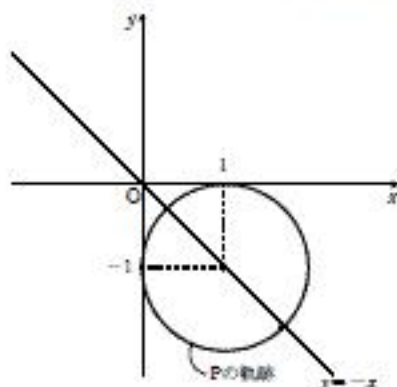
 l_1 より, $m = \frac{y}{x-1}$ ($x \neq 1$) なので, これを l_2 に代入すると,

$$y = \frac{1+m}{1-m}x - 1 \text{ より}$$

$$\therefore y = \frac{x-1+y}{x-1-y}x - 1 \text{ が得られる.}$$

これを整理して,

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \quad (x, y) = (0, -1), (1, -2) \text{ を除く.}$$

(3) (2) より, 点 P の軌跡は, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ という円になるので, 図示すると
 原点 O から P までの距離が最大となるのは,

 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ と $y = -x$ の交点の $x > 1$ の部分.

よって, 代入して整理すると,

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

 よって, 最大となる点は, $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, -\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$

$$m = \frac{y}{x-1}$$

 なので, 最大の点を代入すると, $\therefore m = -\sqrt{2} - 1$