

I. (1) もとの命題の対偶をとると、 $d \neq 0$ が 整数 のとき、

「 d が 3 の倍数でないならば、 d^2 は 3 の倍数でない」
となり、これを示す。

$d = 3k \pm 1$ (k : 整数) とかけるので、

このとき、 $d^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$

k は整数より、 $3k^2 \pm 2k$ も整数であるから、

d^2 は 3 の倍数ではない。

よって、命題は示された。 //

(2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると、

$\sqrt{3} = \frac{n}{m}$ (m と n は互いに素な正の整数)

と表せる。両辺を 2 乗して分母を払うと、

$$n^2 = 3m^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

m^2 は整数であるから、 n^2 は 3 の倍数である。

よって、 n は 3 の倍数となる。(1)より)

ゆえに、 $n = 3k$ (k は整数) とおいて、①に代入すると、

$$(3k)^2 = 3m^2 \quad m^2 = 3k^2$$

k^2 は整数であるから、 m^2 は 3 の倍数である。

よって、 m は 3 の倍数となる。(1)より)

したがって、 m, n はともに 3 の倍数となり

互いに素であることに反する。

すなわち、 $\sqrt{3}$ は無理数である。 //

(3) $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = 0$ の両辺を $\sqrt{2}$ 倍すると、

$$\sqrt{2}a + 2b + \sqrt{6}c = 0$$

==> $a \neq 0$ と仮定すると、

$$\frac{2b}{a} = -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}c}{a}$$

左辺が有理数であるのに比べ、
右辺が無理数であることが矛盾。

ゆえに $a = 0$

よって、 $2b + \sqrt{6}c = 0$

0 ==> $c \neq 0$ と仮定すると、

$\sqrt{6} = -\frac{2b}{c}$ となり、 $-\frac{2b}{c}$ が有理数
であることに反する。

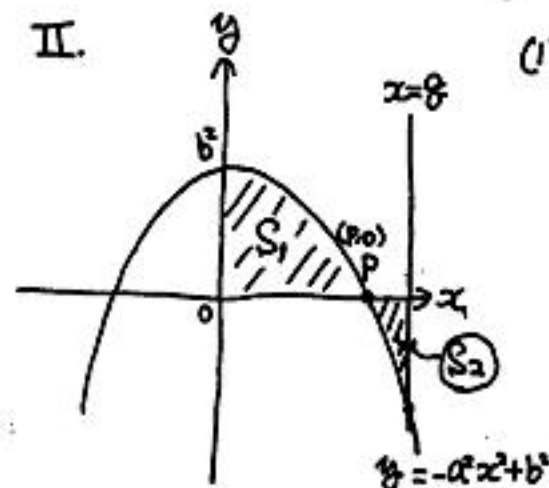
ゆえに $c = 0$

したがって $2b = 0$ $\therefore b = 0$

以上より

$a = 0, b = 0, c = 0$ //

II.



$$(1) y = -a^2x^2 + b^2$$

x軸と交わる点は、 $y=0$ より

$$0 = -a^2x^2 + b^2$$

$$a > 0, b > 0 \text{ より, } x = \pm \frac{b}{a}$$

$p > 0$ より.

$$\therefore p = \frac{b}{a} //$$

$$\begin{aligned} (2) S_1 &= \int_0^p (-a^2x^2 + b^2) dx \\ &= \left[-\frac{a^2}{3}x^3 + b^2x \right]_0^p \\ &= \frac{2b^3}{3a} // \quad \left(p = \frac{b}{a} \text{ より} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) S_2 &= \int_p^g \{ -(-a^2x^2 + b^2) \} dx \\ &= \left[\frac{a^2}{3}x^3 - b^2x \right]_p^g \\ &= \frac{a^2}{3}g^3 - b^2g + S_1 \\ &= \frac{a^2}{3}g^3 - b^2g + \frac{2b^3}{3a} // \end{aligned}$$

$$(4) S_1 = S_2 \text{ のとき, (2), (3) より,}$$

$$\frac{a^2}{3}g^3 = b^2g$$

$$\left(\frac{ag}{b} \right)^2 = 3 \quad (g > 0)$$

$$p = \frac{b}{a} \text{ より,}$$

$$\left(\frac{g}{p} \right)^2 = 3$$

$$\frac{g}{p} > 0 \text{ より,}$$

$$\frac{g}{p} = \sqrt{3} //$$

III. (1)

$$P_1(n) = \frac{{}^{n-2}C_1}{{}^nC_1} = \frac{n-2}{n} //$$

$$(2) \quad P_2(n) = \frac{{}^{n-2}C_2 \cdot {}^2C_1}{{}^nC_3} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)} //$$

- (3) 壺の中にボールが3個以下入っていたとすると、
 $n \leq 3$ なので、(2)の $P_2(n) \leq 0$
 となるため 起こりえない。 $n \geq 4$ のとき、 $P_2(n) > 0$
 より、壺の中に少なくとも4個以上のボールが
 入っていた。 //

$$(4) \quad \begin{cases} P_1(n) = \frac{n-2}{n} \geq 0.65 = \frac{13}{20} \quad \dots \textcircled{1} \\ P_2(n) = \frac{6(n-3)}{n(n-1)} \geq 0.6 = \frac{3}{5} \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より、 $n \geq \frac{40}{7} (=5.7\dots)$

②より、 $5 \leq n \leq 6$

①かつ②より、

$$\frac{40}{7} \leq n \leq 6.$$

これをみたす整数 n は、6のみ。

$$n = 6 //$$