

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & \text{ア} & \text{イ} & \text{ウ} & \text{エ} & \text{オ} & \text{カ} & \text{キ} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \text{e} & \text{b} & \text{h} & \text{a} & \text{g} & \text{c} & \text{h} \end{array}$$

解説 ア～エは略。

線分 $EP \times OQ$ が交わる点を、実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{OE} + r\overrightarrow{EP} = s\overrightarrow{OQ}$$

と表わすから、

$$\begin{cases} r=s \\ 1-r=st \\ 1-\frac{2}{3}r=s \end{cases} \quad \therefore r=s=\frac{3}{5}, \quad t=\frac{2}{3} \quad \dots \text{オ}$$

2. のとき、

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{22}}{3} \quad \dots \text{カ}$$

であり、また

$$|\overrightarrow{EP}| = \sqrt{1 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}$$

より、

$$\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{EP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta = \frac{22}{9} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \left(\vec{a} - \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{22}{9} \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{22} \quad \dots \text{キ}$$

II ケ ケ コ サ シ ス セ
 d i e e k i l

解説 (1) ケ, コ は 略。

$$f''(x) = 0 \text{ とするとは}$$

$$b \cos x = a \sin x$$

のとき、2 のときの x を α とする、

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}.$$

を代入し、

$$f(\alpha) = \frac{1}{a + b \tan \alpha} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \dots \square$$

(2)

$$aI + bJ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \quad \dots \gamma$$

$$bI - aJ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b \cos x - a \sin x}{a \cos x + b \sin x} dx$$

$$= \left[\log(a \cos x + b \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log \frac{b}{a} \quad \dots \delta$$

2 の 2 式より、

$$(a^2 + b^2) I = \frac{\pi}{2} a + b \log \frac{b}{a} \quad \dots \epsilon$$

$$(a^2 + b^2) J = \frac{\pi}{2} b - a \log \frac{b}{a} \quad \dots \zeta$$

III (1) 点 $(t, \frac{1}{4}t^2)$ を中心とする半径 $\frac{1}{4}t^2$ の円だから,

$$O_t: (x-t)^2 + (y - \frac{1}{4}t^2)^2 = (\frac{1}{4}t^2)^2 \quad \dots (\text{答})$$

(2) 展開して,

$$O_t: x^2 - 2xt + t^2 + y^2 - \frac{1}{2}yt^2 = 0$$

この O_t が点 (a, b) を通るとして,

$$(1 - \frac{b}{2})t^2 - 2at + a^2 + b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(i) $b=2$ のとき, ①は

$$t = \frac{a^2 + 4}{2a} > 0$$

となり, つねに正の t が存在する。

(ii) $b > 2$ のとき, ①の左辺を $f(t)$ とすると,

$y = f(t)$ は上に凸な放物線で $f(0) = a^2 + b^2 > 0$

をみたすから, $f(t) = 0$ をみたす正の t が
つねに存在する。

(iii) $0 < b < 2$ のとき, $y = f(t)$ は下に凸な放物線で

軸の t 座標は正だから, $f(t) = 0$ をみたす

正の t が存在するための条件は,

$$a^2 - (1 - \frac{b}{2})(a^2 + b^2) \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b(b-2) \geq 0$$

この条件は $b \geq 2$ を含んでいるから, まためて

$$a^2 + (b-1)^2 \geq 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad \dots (\text{答})$$

(3) (2)より, O_t が通過する領域或は $x^2 + (y-1)^2 \geq 1$ ($x > 0, y > 0$)

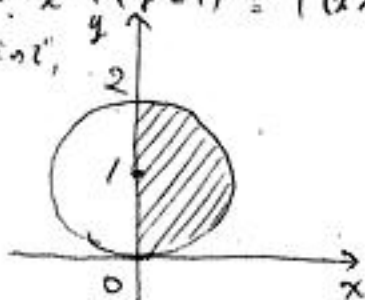
となり, これは除く領域或は求める領域なら,

$$x^2 + (y-1)^2 < 1$$

($x > 0, y > 0$)

これを図示すると右図のように
なり, 境界は含まない。

$\dots (\text{答})$



IV (1) $y = \log x$ に対し, $y' = \frac{1}{x}$ となる,

$$\begin{cases} \text{直線 AP: } y = x - 1 \\ \text{直線 PQ: } y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t \end{cases}$$

2の2式を連立方程式として解くことができる,

$$P\left(\frac{t}{t-1} \log t, \frac{t}{t-1} (\log t - 1)\right) \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad S(t) = \int_1^t \log x \, dx = [x(\log x - 1)]_1^t \\ = t \log t - t + 1$$

$$S_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)\left(\frac{t}{t-1} \log t - 1\right) \\ = \frac{1}{2}(t \log t - t + 1)$$

$$\therefore \frac{S_1(t)}{S(t)} = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \frac{S_2(t)}{S_3(t)} = \frac{QC}{RC} = \frac{\log t}{t-1}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{S_2(t)}{S_3(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} \\ = \log e = 1 \quad \dots (\text{答})$$

$$(4) \quad \frac{BP}{CR} = \frac{\Delta ACP}{\Delta ACR} = \frac{S_1(t)}{S_3(t)} \\ = \frac{S_1(t)}{S(t)} \cdot \frac{S(t)}{S_3(t)}$$

222, $S_2(t) < S(t) < S_3(t)$ となる,

$$\frac{S_2(t)}{S_3(t)} < \frac{S(t)}{S_3(t)} < 1$$

つまり, 222の元の原理と(3)の結果から,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{S(t)}{S_3(t)} = 1$$

よって, (2)の結果より,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{BP}{CR} = \frac{1}{2} \quad (\text{証明終})$$