

(1)2つの直線が交わらないのは,2直線が平行であり,なおかつ一致しない場合に限る.したがって,2直線が平行になるのは,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

のときであり,一致しないためには,

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

であればよい.従って求める条件は,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \dots (\text{答})$$

のときである.

(2)2直線がただ1点のみで交わるのは,2直線が平行でなく,なおかつ一致もしていない場合である.つまりこれは,

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \dots (\text{答})$$

ということである.

(3) c_1, c_2 の変化前の交点の座標を (x_0, y_0) , 変化後の交点の座標を (x'_0, y'_0) とする.このとき,

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x'_0 + b_1y'_0 + c_1 + 2 = 0 \\ a_2x'_0 + b_2y'_0 + c_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

を得る.これら2セットの式の,第1式どうし,第2式どうしの差をとると,

$$\begin{cases} a_1(x'_0 - x_0) + b_1(y'_0 - y_0) + 2 = 0 \\ a_2(x'_0 - x_0) + b_2(y'_0 - y_0) + 2 = 0 \end{cases}$$

である.よって,この連立方程式を解いて,求める変化量は,

$$x'_0 - x_0 = \frac{2(b_1 - b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}, y'_0 - y_0 = \frac{2(a_2 - a_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} \dots (\text{答})$$

(1)「白(赤)い花が開花する」という事象を $W(R)$ とし、「その花が $A(B)$ 種からのものである」という事象を $A(B)$ とかく。また、白い花が開花する確率を $P(W)$ などと書くことにすると、

$$P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B)$$

であるから、

$$P(W) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \cdots (\text{答})$$

であり、

$$P(R) = 1 - P(W) = \frac{3}{8} \cdots (\text{答})$$

である。

(2)1年目に開花した白い花をとってきたとき、それが A 種からのものである確率を考えると、それは、 $P(A|W)$ のことであって、

$$\begin{aligned} P(A|W) &= \frac{P(A \cap W)}{P(W)} \\ &= \frac{P(W|A)P(A)}{P(W)} \\ &= \frac{3/4 \cdot 1/2}{5/8} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。よって、2年目は、 A 種の種と B 種の種を $3:2$ の割合で蒔いたのと同じことである。したがって、白い花が開花する確率は、

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{20} \cdots (\text{答})$$

であり、赤い花が開花する確率は、

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \cdots (\text{答})$$

である。

(3)2年目に開花した白い花のうち、 A 種のものである確率は (2) と同様にして、

$$\frac{3/4 \cdot 3/5}{13/20} = \frac{9}{13}$$

であり、 B 種のものである確率は $\frac{4}{13}$ である。従って、3年目に白い花が咲く確率は、

$$\frac{9}{13} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{52}$$

である。そのうち、 A 種からのものである確率は、

$$\frac{9/13 \cdot 3/4}{35/52} = \frac{27}{35}$$

であり、 B 種のものである確率は、 $\frac{8}{35}$ である。

さて、白い花を3年間分集めてきたとしよう。求める確率は、

- 1年目に開花した花であり、かつ A 種からのもの
- 2年目に開花した花であり、かつ A 種からのもの
- 3年目に開花した花であり、かつ A 種からのもの

である確率の合計である。さらに、3年分の白い花のうち、1年目に開花したものである確率は、

$$\frac{5/8}{5/8 + 5/8 \cdot 13/20 + 5/8 \cdot 13/20 \cdot 35/52} = \frac{80}{167}$$

であり、2年目のものは、

$$\frac{5/8 \cdot 13/20}{5/8 + 5/8 \cdot 13/20 + 5/8 \cdot 13/20 \cdot 35/52} = \frac{52}{167}$$

であり、3年目のものは、

$$\frac{5/8 \cdot 13/20 \cdot 35/52}{5/8 + 5/8 \cdot 13/20 + 5/8 \cdot 13/20 \cdot 35/52} = \frac{35}{167}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{80}{167} \cdot \frac{3}{5} + \frac{52}{167} \cdot \frac{9}{13} + \frac{35}{167} \cdot \frac{27}{35} = \frac{111}{167} \cdots (\text{答})$$

である。

3

(1) 接点の x 座標を t ($0 < t < \sqrt{b/a}$) とおく. このとき, 接線の方程式は,

$$y - (-at^2 + b) = -2at(x - t)$$

であり, x 軸との交点は $P\left(\frac{t}{2} + \frac{b}{2at}, 0\right)$ であり, y 軸との交点は $Q(0, at^2 + b)$ であるから, 三角形 OPQ の面積を $S(t)$ と書くと,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{4} \left(t + \frac{b}{at} \right) (at^2 + b) \\ &= \frac{1}{4} \left(at^3 + 2bt + \frac{b^2}{at} \right) \end{aligned}$$

である. よって,

$$S'(t) = \frac{1}{4} \left(3at^2 + 2b - \frac{b^2}{at^2} \right)$$

であるから, $S'(t) = 0$ になる t は, $t = \sqrt{b/(3a)}$ である. よって, 増減表は以下 (別ページ参照) のようになり, $S(t)$ は $t = \sqrt{b/(3a)}$ つまり, 接点 $\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}, \frac{2b}{3}\right)$

のとき, 最小値 $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{3b^3}{a}}$ をとる.

(2) 面積は,

$$\int_0^{\sqrt{b/a}} (-ax^2 + b) dx = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{a}}$$

であるから, これが 1 になるのは,

$$4b^3 = 9a \cdots (\text{答})$$

のときである. $b = 1/2$ のときは, $a = 1/18$ であり, $b = 1$ のときは, $a = 4/9$ であり, $b = 2$ のときは $a = 32/9$ であるから, グラフは以下のようなになる (別ページ参照).

(3)(2) より, 二次関数の式は,

$$y = -\frac{4b^3}{9}x^2 + b$$

である. これが $y = c/x$ と接しているとして, その接点の x 座標を s とすると, ここでは y 座標と接線の傾きはともに等しいので,

$$\begin{cases} -\frac{4b^3}{9}s^2 + b = \frac{c}{s} \\ -\frac{8b^3}{9}s = -\frac{c}{s^2} \end{cases}$$

を得る. これを解いて, $c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdots (\text{答})$ を得る.

t	0	$\cdots$	$\sqrt{b/(3a)}$	$\cdots$	$\sqrt{b/a}$
$S'(t)$	+	-	0	+	+
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

表 1: 3-(1) の表

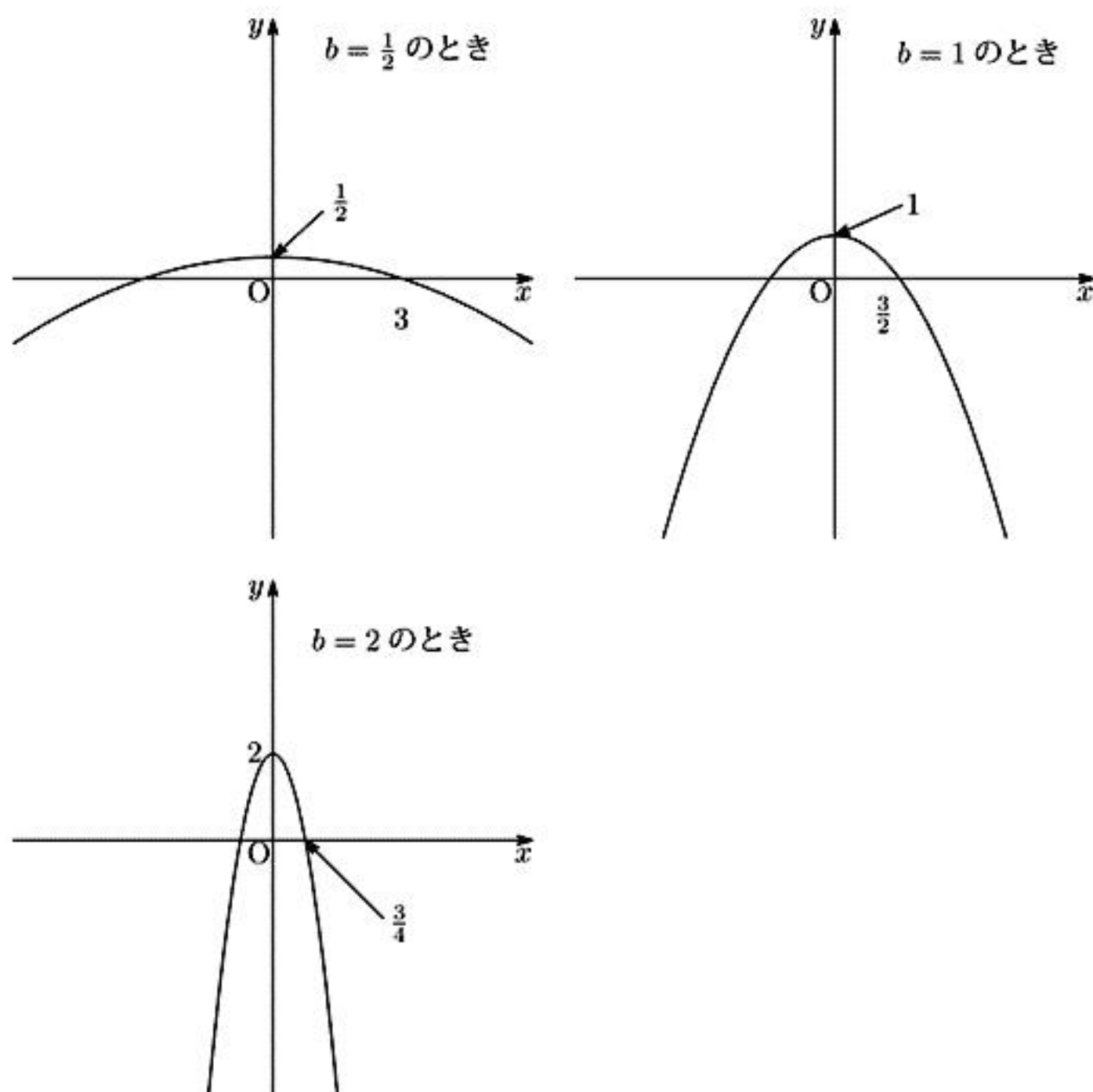


図 1: 3-(2) の図