

2005 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:00～16:00 60 分)

1. この問題は、入学願書提出時に選択した科目の問題です。科目名を確認のうえ、解答してください。
2. 解答用紙は、記述解答用紙のみです。
3. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
4. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル（いずれもHB・黒）を使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。
5. 解答用紙には、受験番号と氏名を2か所記入してください。

I 2つの曲線

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$

について、次の問に答えよ。(30点)

- (1) 2つの曲線の極値を調べ、増減表とグラフをかけ。
- (2) 2つの曲線の交点の x 座標を求めよ。
- (3) 2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

II 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ が, $2^r \leq n < 2^{r+1}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) をみたすとき,

$$\left. \begin{aligned} n &= a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{r-1}a_{r-1} + 2^ra_r \\ (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1} \text{ は } 0 \text{ または } 1, a_r &= 1) \end{aligned} \right\} (*)$$

と表わされ, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ は n で決まる。 $(*)$ を n の 2 進展開という。たとえば, $n = 5$ のとき, $2^2 \leq 5 < 2^3$ であり,

$$5 = 1 + 2 \times 0 + 2^2 \times 1$$

が 5 の 2 進展開である。自然数を $(*)$ のように 2 進展開したとき,

$$f(n) = a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + \cdots + 3^{r-1}a_{r-1} + 3^ra_r$$

とする。次の問に答えよ。(30点)

- (1) $f(6), f(7)$ を求めよ。
- (2) n を $(*)$ のように 2 進展開したとき, $2n$ の 2 進展開を $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ と r を用いて表せ。
- (3) $f(n) < 2n$ をみたすような全ての自然数 n を求めよ。

Ⅲ 点 $(1, 0)$ を通り y 軸に平行でない傾き $m(m \neq 1)$ の直線 ℓ_1 と、点 $(0, -1)$ を通る傾き m' の直線 ℓ_2 が点 P で交わるとする。交点 P を中心にして、 ℓ_1 を反時計回りに 45° 回転すると ℓ_2 に重なるとき、次の間に答えよ。(40 点)

- (1) m' を m で表せ。
- (2) 点 P の座標を (x, y) とするとき、 x と y の関係式を求めよ。
- (3) 原点 O から点 P までの距離が最大になるときの m の値を求めよ。