

2005 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:10～16:50 100 分)

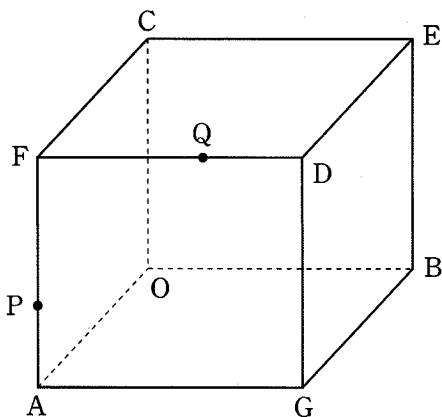
1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル（いずれもHB・黒）を使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。
また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 記述解答用紙には、受験番号と氏名を2か所記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、電算処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 設問文にある点数は、満点が100点となるような配点表示になっていますが、数学科の配点は200点となりますので、注意してください。

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマーク解答用紙に記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

図のように、1辺の長さが1の立方体OAGB-CFDEにおいて、

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$$

とおく。線分AFを1:2に内分する点をP、線分FDを $t:(1-t)$ に内分する点をQとおく。ただし、 $0 < t < 1$ とする。



このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \boxed{\text{ア}} \vec{c},$$

$$\overrightarrow{EP} = \vec{a} + \boxed{\text{イ}} \vec{b} + \boxed{\text{ウ}} \vec{c},$$

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \boxed{\text{エ}} \vec{b} + \vec{c}$$

である。線分EPとOQが交わる時、 $t = \boxed{\text{オ}}$ となる。このとき、

$|\overrightarrow{OQ}| = \boxed{\text{カ}}$ で、 $\overrightarrow{EP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角度を θ とすれば $\cos \theta = \boxed{\text{キ}}$ である。

問題Ⅰア、イ、ウ、オの解答群

- (a) 1 (b) -1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$ (f) $-\frac{1}{3}$
 (g) $\frac{2}{3}$ (h) $-\frac{2}{3}$ (i) $\frac{1}{4}$ (j) $-\frac{1}{4}$ (k) $\frac{3}{4}$ (l) $-\frac{3}{4}$
 (m) $\frac{1}{5}$ (n) $-\frac{1}{5}$ (o) $\frac{2}{5}$ (p) $-\frac{2}{5}$ (q) $\frac{3}{5}$ (r) $-\frac{3}{5}$
 (s) $\frac{4}{5}$ (t) $-\frac{4}{5}$

問題Ⅰエの解答群

- (a) t (b) $-t$ (c) $t-1$ (d) $-t+1$ (e) $2t-1$
 (f) $-2t+1$ (g) $\frac{t-1}{2t-1}$ (h) $\frac{-t+1}{2t-1}$ (i) $\frac{2t-1}{t-1}$ (j) $\frac{-2t+1}{t-1}$

問題Ⅰカ、キの解答群

- (a) $\frac{22}{9}$ (b) $-\frac{22}{9}$ (c) $\frac{\sqrt{22}}{3}$ (d) $-\frac{\sqrt{22}}{3}$ (e) $\frac{\sqrt{22}}{5}$ (f) $-\frac{\sqrt{22}}{5}$
 (g) $\frac{3}{22}$ (h) $-\frac{3}{22}$ (i) $\frac{9}{22}$ (j) $-\frac{9}{22}$ (k) $\frac{3}{\sqrt{22}}$ (l) $-\frac{3}{\sqrt{22}}$
 (m) $\frac{5}{\sqrt{22}}$ (n) $-\frac{5}{\sqrt{22}}$

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマーク解答用紙に記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

a, b を正の定数とし、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}$ とおく。

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする。 $f'(x)$ および $f''(x)$ を計算すると、

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{ク}}}{(a \cos x + b \sin x)^2}, \quad f''(x) = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{(a \cos x + b \sin x)^3}$$

となる。また、曲線 $y = f(x)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) の変曲点の y 座標は $\boxed{\text{コ}}$ である。

- (2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めたい。補助的に $g(x) = \frac{\sin x}{a \cos x + b \sin x}$ を考え、 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$ とおく。このとき、

$$aI + bJ = \boxed{\text{サ}}, \quad bI - aJ = \boxed{\text{シ}}$$

である。そこで $aI + bJ = \boxed{\text{サ}}$, $bI - aJ = \boxed{\text{シ}}$ を I, J に関する連立方程式とみなして I, J を求めると、

$$I = \frac{\boxed{\text{ス}}}{a^2 + b^2}, \quad J = \frac{\boxed{\text{セ}}}{a^2 + b^2}$$

となる。

問題IIク、ケの解答群

- (a) a (b) b (c) $-a$ (d) $-b$
 (e) $2a^2 \cos x + 2ab \sin x$ (f) $2a^2 \cos x - 2ab \sin x$
 (g) $-2a^2 \cos x + 2ab \sin x$ (h) $2b^2 \cos x + 2ab \sin x$
 (i) $2b^2 \cos x - 2ab \sin x$ (j) $-2b^2 \cos x + 2ab \sin x$
 (k) $b \cos^2 x - b \sin^2 x$ (l) $-b \cos^2 x + b \sin^2 x$
 (m) $b \cos^2 x - 2a \sin x \cos x - b \sin^2 x$
 (n) $-b \cos^2 x + 2a \sin x \cos x + b \sin^2 x$

問題IIコ of the 解答群

- (a) $\frac{1}{a+b}$ (b) $\frac{a}{a+b}$ (c) $\frac{b}{a+b}$ (d) $\frac{1}{a^2+b^2}$
 (e) $\frac{a}{a^2+b^2}$ (f) $\frac{b}{a^2+b^2}$ (g) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$ (h) $\frac{b^2}{a^2+b^2}$
 (i) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (j) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (k) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問題IIサ、シの解答群

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{4}$ (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) π
 (g) $\log a$ (h) $-\log a$ (i) $\log b$ (j) $-\log b$ (k) $\log \frac{b}{a}$ (l) $-\log \frac{b}{a}$

問題IIス、セの解答群

- (a) $\frac{1}{2}a + b \log a$ (b) $\frac{1}{2}a - b \log a$ (c) $\frac{1}{2}b + a \log a$ (d) $\frac{1}{2}b - a \log a$
 (e) $a + b \log \frac{b}{a}$ (f) $a - b \log \frac{b}{a}$ (g) $b + a \log \frac{b}{a}$ (h) $b - a \log \frac{b}{a}$
 (i) $\frac{\pi}{2}a + b \log \frac{b}{a}$ (j) $\frac{\pi}{2}a - b \log \frac{b}{a}$ (k) $\frac{\pi}{2}b + a \log \frac{b}{a}$ (l) $\frac{\pi}{2}b - a \log \frac{b}{a}$
 (m) $\pi a + b \log b$ (n) $\pi a - b \log b$ (o) $\pi b + a \log b$ (p) $\pi b - a \log b$

III 正の実数 t に対して、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ を中心とし、 x 軸に接している円を O_t とする。このとき、以下の問に答えよ。(30 点)

- (1) 円 O_t を表す方程式を求めよ。
- (2) a と b を正の実数とする。点 (a, b) を通る円 O_t が存在するための a と b の条件を求めよ。
- (3) xy 平面の第 1 象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$ の部分) 内で、いかなる $t > 0$ に対しても円 O_t が通過しない領域を求め、それを図示せよ。

IV 曲線 $y = \log x (x > 0)$ 上の点 $A(1, 0)$ および $Q(t, \log t) (t > 1)$ で接線を引き、その交点を P とする。また、点 P, Q から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ B, C とする。さらに、直線 AP と直線 CQ の交点を R とする。以下の問に答えよ。(30 点)

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ。

(2) 曲線 $y = \log x$ と線分 AC, QC で囲まれた部分の面積を $S(t)$ 、三角形 ACP の面積を $S_1(t)$ とするとき、 $\frac{S_1(t)}{S(t)}$ を求めよ。

(3) 三角形 ACQ の面積を $S_2(t)$ 、三角形 ACR の面積を $S_3(t)$ とおくと、

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{S_2(t)}{S_3(t)}$$

を求めよ。

(4) 以上の結果を利用して

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{BP}{CR} = \frac{1}{2}$$

を示せ。