

## 2005 年 度 入 学 試 験 問 題

# 数 学

(試験時間 15:10～16:50 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル（いずれも**HB・黒**）を使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。  
また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。
4. 記述解答用紙には、受験番号と氏名を2か所記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、電算処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマーク解答用紙に記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

(1)  $t^3 + t^2 - 8t - 4$  を  $t^2 - 2t - 3$  で割ったときの余りは ア ,

$t^3 - 3t^2 - 2t + 5$  を  $t^2 - 2t - 3$  で割ったときの余りは イ である。

したがって、 $(t^3 + t^2 - 8t - 4)(t^3 - 3t^2 - 2t + 5)$  を  $t^2 - 2t - 3$  で割ったときの余りは ウ である。

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。このとき、 $A^2 - 2A - 3E = O$  が成立する。したがって、

$$A^3 + A^2 - 8A - 4E = \text{ エ },$$

$$A^3 - 3A^2 - 2A + 5E = \text{ オ }$$

である。さらに、

$$(A^3 + A^2 - 8A - 4E)(A^3 - 3A^2 - 2A + 5E) = \text{ カ }$$

を得る。ただし  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  である。

問題Ⅰ ア, イ, ウの解答群

- Ⓐ  $t+2$     Ⓑ  $t-2$     Ⓒ  $-t+2$     Ⓓ  $-t-2$     Ⓔ  $2t+1$   
Ⓕ  $2t-1$     Ⓖ  $-2t+1$     Ⓗ  $-2t-1$     Ⓘ  $t+5$     Ⓙ  $t-5$   
Ⓚ  $-t+5$     Ⓛ  $-t-5$     Ⓜ  $5t+1$     Ⓝ  $5t-1$     ⓐ  $-5t+1$   
Ⓟ  $-5t-1$     Ⓠ  $5t+7$     Ⓡ  $5t-7$     Ⓢ  $-5t+7$     Ⓣ  $-5t-7$

問題Ⅰ エ, オ, カの解答群

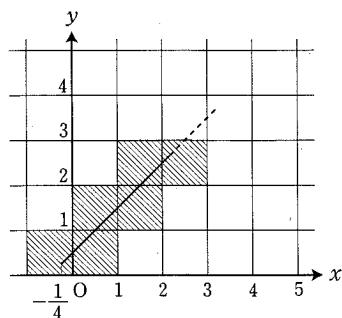
- Ⓐ  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$     Ⓑ  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$     Ⓒ  $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$     Ⓓ  $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$   
Ⓔ  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$     Ⓕ  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$     Ⓖ  $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$     Ⓗ  $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$   
Ⓘ  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$     Ⓙ  $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$     Ⓚ  $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$     Ⓛ  $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$   
Ⓜ  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$     Ⓝ  $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$     ⓐ  $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$     Ⓠ  $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$   
Ⓡ  $\begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$     Ⓢ  $\begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$     Ⓣ  $\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$     Ⓤ  $\begin{pmatrix} -2 & -20 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

II 次の問題の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマーク解答用紙に記入せよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$y$  軸と平行で  $x$  座標が整数である直線と、 $x$  軸と平行で  $y$  座標が整数である直線により、 $xy$  平面を1辺の長さが1の正方形に区分しておく。

$y = f(x) (x \geq -\frac{1}{4})$  を単調に増加する連続関数とする。 $x = -\frac{1}{4}$  から始めて  $y = f(x)$  のグラフが通過する正方形を6枚つなげてとる。それが立方体の展開図になっているかどうか、つまり、これらの正方形のつなぎ目の辺を直角に折り、1辺の長さが1の立方体が組み立てられるかどうかを調べる。ただし、6枚の正方形が定まるのに必要な範囲においてグラフがこれらの正方形の頂点を通過しない場合だけを考える。

例えば、 $f(x) = x + \frac{1}{2}$  の場合、右の図に示すように6枚の正方形が定まり、それらのなす図形  は立方体の展開図となっている。



- (1)  $b$  を正の定数とする。 $f(x) = e^{x-b}$  に対して、上に示した  $f(x) = x + \frac{1}{2}$  の場合と同じ位置かつ同じ形の展開図が得られるのは   $< b <$
- のときである。ここで、 $e$  は自然対数の底であり、 $2 < e < 3$  を満たす。

- (2) 次に  $f(x) = \frac{1}{2}a^x$  (ただし、 $a$  は  $a > 1$  を満たす定数) とする。

$< a$  の場合は立方体の展開図は得られない。

$1 < a <$   の場合には、最初の4枚の正方形が横に並んでしまう。

$y = f(x)$  がつねに増加しているので、この場合も立方体の展開図は得られないことが分かる。 $f(x) = \frac{1}{2}a^x (a > 1)$  から得られる立方体の展開図のうちで、6枚目の正方形の  $x$  座標が最も大きくなるのは

$< a <$   のときであり、このとき6枚目の正方形の  $x$  座標は   $\leq x \leq$    $+ 1$  を満たす。

問題IIキ, クの解答群

- |                 |                 |                 |                |
|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| Ⓐ 1             | Ⓑ 2             | Ⓒ $-1 + \log 2$ | Ⓓ $\log 2$     |
| Ⓔ $1 + \log 2$  | Ⓕ $1 - \log 2$  | Ⓖ $2 - \log 2$  | Ⓗ $3 - \log 2$ |
| Ⓙ $-2 + \log 3$ | ⓫ $-1 + \log 3$ | Ⓚ $\log 3$      | ① $1 + \log 3$ |
| Ⓜ $1 - \log 3$  | Ⓝ $2 - \log 3$  | ⓪ $3 - \log 3$  |                |

問題IIケ, コ, サ, シの解答群

- |                 |                 |                 |               |               |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|
| Ⓐ 2             | Ⓑ 3             | Ⓒ 4             | Ⓓ 5           | Ⓔ 6           | Ⓕ 7             |
| Ⓖ 8             | Ⓗ $\sqrt{2}$    | Ⓙ $\sqrt{6}$    | ⓫ $\sqrt{10}$ | Ⓚ $2\sqrt{2}$ | ① $\sqrt[3]{2}$ |
| Ⓜ $\sqrt[3]{4}$ | Ⓝ $\sqrt[3]{6}$ | ⓪ $\sqrt[4]{2}$ |               |               |                 |

Ⅲ  $a$  を正の定数とし、 $r > a$ 、 $R > a$  とする。座標平面上において、2つの円

$$C_1: (x+a)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$C_2: (x-R)^2 + (y+a)^2 = R^2$$

が点  $P$  で接しているという。以下の間に答えよ。(30 点)

(1)  $R$  を  $a$ ,  $r$  を用いて表せ。

(2) 点  $P$  の座標を  $a$ ,  $r$  を用いて表せ。また、点  $P$  を通る 2 円の共通接線の方程式を求めよ。

(3)  $O(0, 0)$ ,  $A(-a, 0)$ ,  $B(0, -a)$  とおき、 $\triangle AOP$  と  $\triangle OBP$  の面積の和を  $S$  とおく。 $r$  が  $r > a$  の範囲を動くとき、 $S$  を最大にする  $r$  の値を求めよ。



IV  $a$  と  $b$  を定数とし、 $f(t) = 1 + at + bt^2 - \cos t$  とする。以下の間に答えよ。

(30 点)

- (1) 定積分  $\int_0^\pi t \sin t \, dt$  と  $\int_0^\pi \sin^2 t \, dt$  を求めよ。
- (2) 関数  $f(t)$  の値が区間  $0 < t < \pi$  において増加し、 $f(t)$  のグラフがその区間で下に凸であるような最小の定数  $a$  と  $b$  を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $a, b$  に対して、 $t$  を媒介変数とする  $xy$  平面上の曲線

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と  $x$  軸とで囲まれた領域の面積を求めよ。

