I

(1) 53

(2) $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$

(3) $30^\circ < \theta < 45^\circ$, $150^\circ < \theta < 315^\circ$

(4) $\frac{1}{10}$

(5) $x = 1,\ a$

Ⅱ

(1) 五角形の内角の和は $180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$$\therefore \angle BAE = \frac{540^\circ}{5} = \underline{108^\circ} \cdots\cdots(答)$$

(2) $\triangle ABC$ は $AB = BC$ の二等辺三角形なので

$$\angle BAF = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \underline{36^\circ} \cdots\cdots(答)$$

(3) $\angle FAG = \angle BAE - \angle BAF - \angle EAG$

$= 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$

$= \underline{36^\circ} \cdots\cdots(答)$

(4) 正五角形の対称性より $AF = AG$ なので

$$\angle AFG = \angle AGF = \frac{180^\circ - \angle FAG}{2} = 72^\circ$$

$\angle ABG = \angle AFG - \angle BAF = 36^\circ$

したがって、$\triangle ABG$ と $\triangle GAF$ について

$\angle ABG = \angle GAF \quad (= 36^\circ) \cdots\cdots ①$

$\angle AGB = \angle GFA \quad (= 72^\circ) \cdots\cdots ②$

①,② より2組の角が等しいので $\triangle ABG \sim \triangle GAF$ (証明終)

(5) (4)より、$AG : AB = GF : GA$

$\Leftrightarrow \quad 1 : x = (x-1) : 1$

$x(x-1) = 1$ より、x について成り立つ式は

$\underline{x^2 - x - 1 = 0} \cdots\cdots(答)$

(6) $x^2 - x - 1 = 0$ で $x > 0$ より $\quad x = \underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdots\cdots(答)$

Ⅲ

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$\displaystyle = \int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2(\beta-\alpha)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$\displaystyle = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$

$\displaystyle = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2)$

$\displaystyle = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　　(証明終)

(2) ①＝② $\Leftrightarrow x^2=-(x-a)^2+h$

$\Leftrightarrow 2x^2-2ax+a^2-h=0$ ……③

③の判別式Dについて

$\displaystyle \frac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-h)>0$　より

$\underline{a^2<2h}$ ……(答)

(3) 放物線①と②の交点のx座標は③より

$\displaystyle x=\frac{a\pm\sqrt{2h-a^2}}{2}$ (それぞれ α, β とおく。ただし $\alpha<\beta$)

求めるべき面積は

$\displaystyle S=\int_{\alpha}^{\beta}\{-(x-a)^2+h-x^2\}\,dx=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$\displaystyle = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{a+\sqrt{2h-a^2}}{2}-\frac{a-\sqrt{2h-a^2}}{2}\right)^3=\underline{\frac{1}{3}(2h-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ ……(答)