

$$(1) \quad a_{n+1} + 2a_n = 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{3} = -2 \left(a_n - \frac{1}{3} \right)$$

これは、数列 $\{a_n - \frac{1}{3}\}$ が、公比 -2 、初項 $(a_1 - \frac{1}{3})$ の等比数列であることを示している。
よって、

$$a_n - \frac{1}{3} = (-2)^{n-1} \cdot \left(a_1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_n = (-2)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{1}{3}, (n \geq 1) \quad \dots\dots \text{答}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は、整数の数列である。……(*)

(*) を n についての数学的帰納法を用いて証明する。

(I) $n = 1$ の時

$$a_1 = 1$$

よって、確かに、(*) は、成立している。

(II) $n = k$ の時

a_k が整数であると仮定する。

(III) $n = k+1$ の時

$$a_{k+1} = 1 - 2a_k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① の左辺は、帰納法の仮定より

整数となる。よって、① の左辺の a_{k+1} も整数となる。

したがって、(I)(II)(III) から数学的帰納法の原理により、任意の自然数 n について (*) が成立することが、証明された。 //

$$(3) \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{3} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (-2)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n 1$$

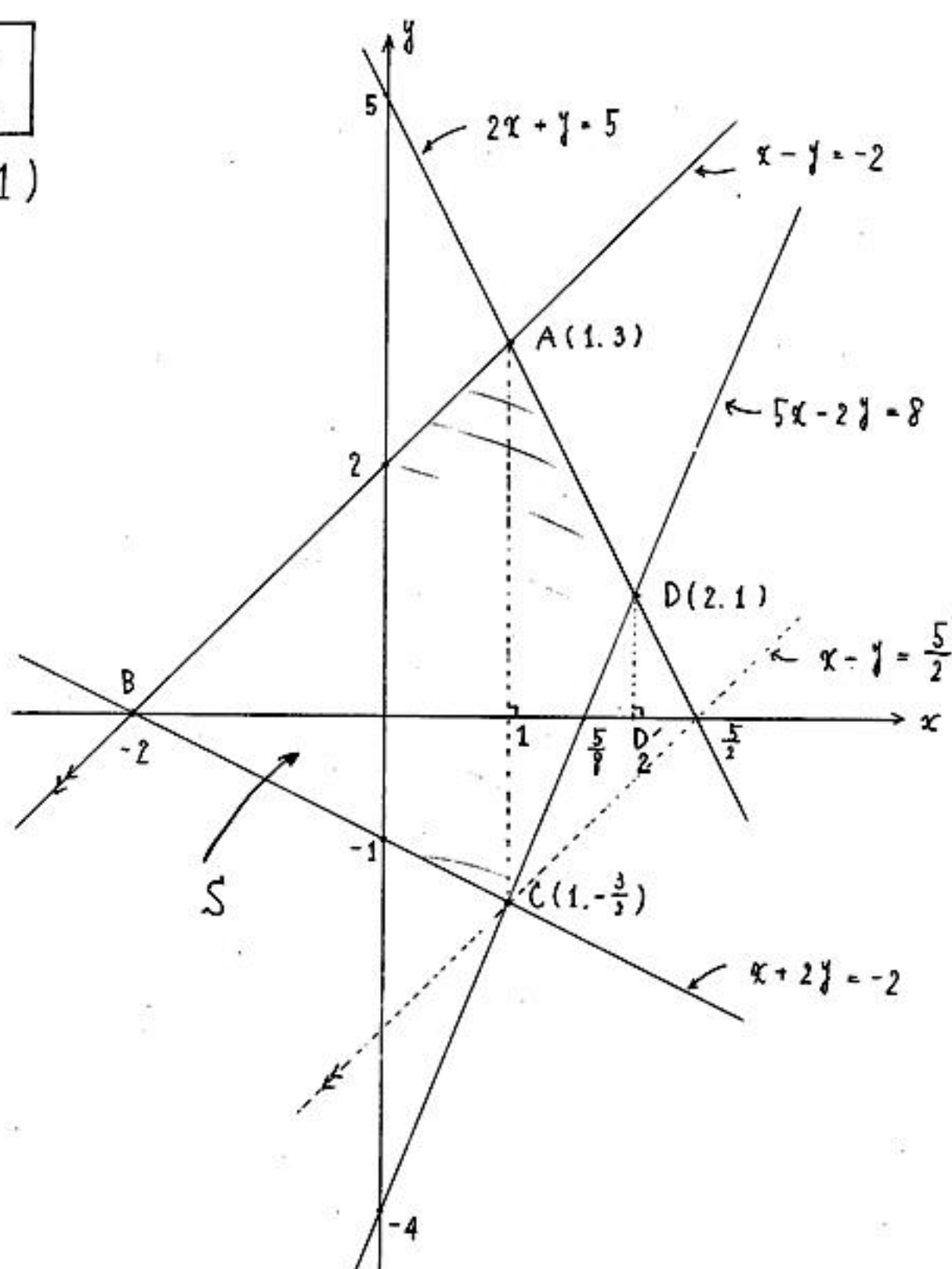
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-2) \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} + \frac{1}{3} n$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{n}{3} + \frac{(-2)^{n+1}}{9}, (n \geq 1)$$

----- 答

II

(1)



S は、上図の斜線部分である。
ただし、境界とすべて含む。

(2) (1) の図のように A, B, C, D, D' を定める。

$$\begin{aligned}
 S &= \triangle ABCD \\
 &= \triangle ABC + \triangle ACD \\
 &= \triangle ABC + \triangle ACD' \\
 &= \frac{1}{2} AC \cdot BD' \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 3 - \left(-\frac{3}{2}\right) \right\} \cdot \left\{ 2 - (-2) \right\} \\
 &= 9 \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $x - y = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$

とおく。(1) の図より

① と S との共有点が存在する。

$$\Leftrightarrow -2 \leq k \leq \frac{5}{2}$$

したがって、

$x - y$ の最大値は $\frac{5}{2}$

$x - y$ の最小値は -2 。..... (答)

III

$$(1) A = \int_0^1 f(x) dx$$

とおく. このとき.

$$A = \int_0^1 (|x-1| + 2A) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_0^1 \{-(x-1) + 2A\} dx \quad \because \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \Rightarrow x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = \left[-\frac{1}{2}x^2 + (1+2A)x \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} + (1+2A) - 0$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

よって 7.

$$f(x) = |x-1| + 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} x-1-1 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ -(x-1)-1 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

----- (答)

(2)(I) $0 < a < 1$ の場合.

$$\int_0^a (-x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_0^a = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって 7. ①を満たす実数解は存在しない. この場合は不適である.

(II) $1 \leq a$ の場合

$$\int_0^1 (-x) dx + \int_1^a (x-2) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^a = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 - 2a - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq 1 \text{ より } a = 2 + \sqrt{3}$$

----- (答)

IV

(1) 選んだ赤色, 青色, 黄色のボールの数をそれぞれ x, y, z [個] とおく. この時, (x, y, z) は, 次の場合がある.

(I) $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ の場合.

順列の総数は,

$$\frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ [通り]}$$

(II) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ の場合.

順列の総数は

$$3! = 6 \text{ [通り]}$$

(III) $(x, y, z) = (0, 2, 1)$ の場合.

順列の総数は, (I) と同様に,

$$3 \text{ [通り]}$$

したがって, (I)(II)(III) より求める順列の総数は,

$$3 + 6 + 3 = 12 \text{ [通り]} \quad \text{----- (答)}$$

(2) (1) と同様に (x, y, z) と表す. (x, y, z) は, 次の場合がある.

(あ) $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ の場合.

順列の総数は,

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ [通り]}$$

(い) $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ の場合.

順列の総数は,

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \text{ [通り]}$$

(う) $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ の場合.

順列の総数は (い) と同様に

$$12 \text{ [通り]}.$$

したがって, (あ)(い)(う) より求める順列の総数は,

$$6 + 12 + 12 = 30 \text{ [通り]} \quad \text{----- (答)}$$

(3) (2) の (あ)(う) の場合について, 赤色のボールが隣接するような順列を考察すれば十分である. 2 個の赤色のボールを束ねて 1 個の大きな赤色のボールと見なすことにする.

(あ) の場合



を置けばよい. よって, この場合は,

$$3 \text{ [通り]}$$

(う) の場合

(i) $\triangle$ $\textcircled{\text{青}}$ $\triangle$ $\textcircled{\text{黄}}$ $\triangle$ の場合

(ii) $\triangle$ $\textcircled{\text{黄}}$ $\triangle$ $\textcircled{\text{青}}$ $\triangle$ の場合

(i)(ii) いずれの場合も 大きな赤色のボール

$\textcircled{\text{大赤}}$ の置き方は 3 通りである.

したがって, 求める確率は,

$$\frac{3+3+3}{30} = \frac{3}{10} \quad \text{----- (答)}$$