I

| 番号 | ア | イ | ウ | エ | オ | カ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答 | a | k | i | f | k | f |

| 番号 | キ |
|---|---|
| 答 | b |

## Ⅱ

| 番号 | ク | ケ | コ | サ | シ | ス |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答 | d | d | l | d | c | e |
| 番号 | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ |
| 答 | m | e | p | f | i | g |

## Ⅲ

(1)
$$\begin{cases} x = \tan\theta \\ y = a\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{a^2}{1+x^2} \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \because a > 0$$

よって

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cdots\cdots (答)$$

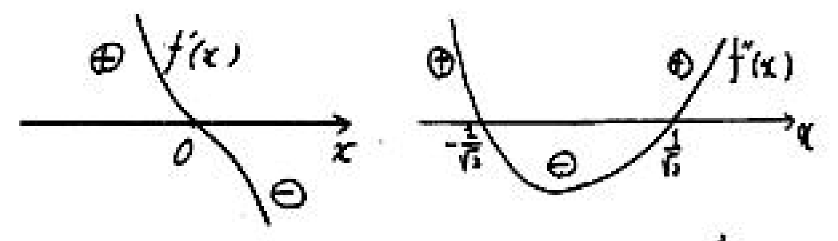
(3) $y = f(x)$ の増減，凹凸を調べる．

$$f'(x) = \frac{-a}{1+x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{ax}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(x) = -a\left\{\frac{1\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(1+x^2)^3}\right\}$$

$$= \frac{a(2x^2-1)}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$




よって

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \because (1+x^2)^{\frac{3}{2}} > 0$$

また

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \qquad \because (1+x^2)^{\frac{5}{2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

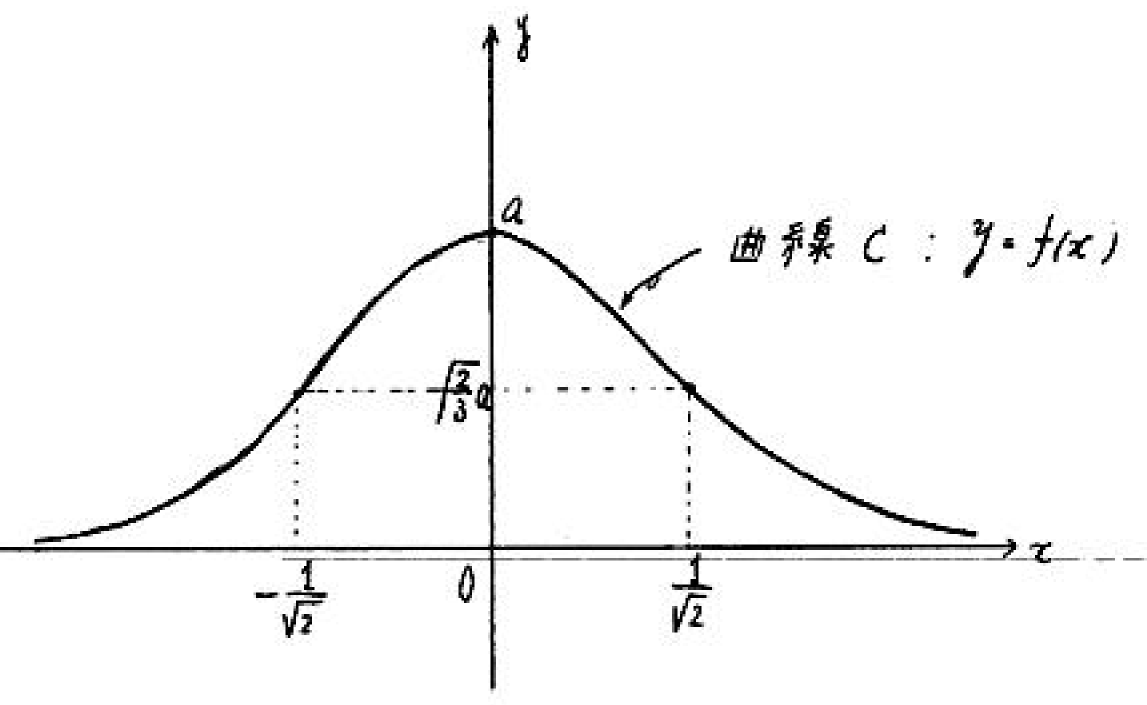
よって増減表は次の通り．

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ | ↗ | $a$ | ↘ | $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ | ↘ |
| | | 変曲点 | | 極大 | | 変曲点 | |

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

したがって曲線 $C$ の概形は次のようになる．




(2) 上記の増減表より，求める変曲点は

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}a\right) \text{ or } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}a\right) \quad \cdots\cdots (答)$$

(4) $P(t, f(t))$ における法線の方程式は

$$(y - f(t))\cdot(-f'(t)) = x - t \quad \cdots\cdots ①$$

①は原点を通るので

$$(0 - f(t))(-f'(t)) = 0 - t$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{at}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = -t$$

$$\Leftrightarrow a^2 t = (1+t^2)^2 t \qquad \because 1+t^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow t\{a^2 - (1+t^2)^2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ or } 1 + t^2 = a \qquad \because \begin{cases} a > 0 \\ 1+t^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ or } t = \pm\sqrt{a-1}.$$

したがって求める $P$ の座標は

(Ⅰ) $0 < a \leqq 1$ の場合

$$(0, a) \quad \cdots\cdots (答)$$

(Ⅱ) $1 < a$ の場合

$$(0, a) \text{ or } (\sqrt{a-1}, \sqrt{a}) \text{ or } (-\sqrt{a-1}, \sqrt{a})$$

$\cdots\cdots$ (答)

# IV

(1) $\int_0^x t e^{-t^2} dt$

$= \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(e^{-t^2}\right)' dt$

$= -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x$

$= -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - 1\right)$ ……(答)

(2) 初めに、

$\int_0^x t^3 e^{-t^2} dt$

を計算する。

$\int_0^x t^3 e^{-t^2} dt$

$= \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(e^{-t^2}\right)'\cdot t^2 dt$

$= -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\cdot t^2\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-t^2}\cdot 2t\, dt$

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}\cdot x^2 + \int_0^x t e^{-t^2} dt$

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - 1\right)$ ∵(1) ……①

次に、$f(x)$ を求める。

$f(x) = \int_0^x (4t^2 - 5) t e^{-t^2} dt$

$= 4\int_0^x t^3 e^{-t^2} dt - 5\int_0^x t e^{-t^2} dt$

$= 4\left\{-\frac{1}{2} e^{-x^2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2} - 1\right)\right\}$

$-5\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-x^2} - 1\right)$ ∵(1)と①

$= -2x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2}$ ……(答)

(3) $P(u, f(u))$ における接線の方程式は、

$y - f(u) = f'(u)(x - u)$

よって、$y$ 切片 $g(u)$ は

$g(u) = f'(u)(0 - u) + f(u)$

$= (4u^3 - 5u)e^{-u^2}(-u) - 2u^2 e^{-u^2}$

$+ \frac{1}{2} e^{-u^2} - \frac{1}{2}$ ∵ $f'(x) = (4x^2 - 5)x e^{-x^2}$

$= e^{-u^2}\left(-4u^4 + 3u^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

以下では、

$G(X) = e^{-X}\left(-4X^2 + 3X + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

$(u^2 = X \geqq 0)$

の増減を調べる。

$G'(X) = -e^{-X}\left(-4X^2 + 3X + \frac{1}{2}\right)$

$+ e^{-X}(-8X + 3)$

$= e^{-X}\left(4X^2 - 11X + \frac{5}{2}\right)$

よって、

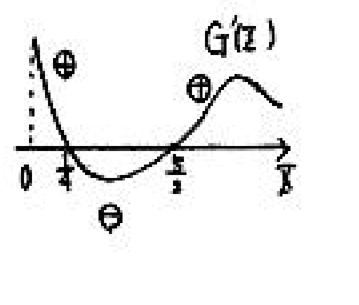
$G'(X) = 0 \iff 4X^2 - 11X + \frac{5}{2} = 0$

$\iff X = \frac{1}{4}$ or $\frac{5}{2}$ ∵ $e^{-X} > 0$

よって、増減表は次の通り。

| $X$ | $(0)$ | … | $\frac{1}{4}$ | … | $\frac{5}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G'(X)$ | $(+)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $G(X)$ | $(0)$ | ↗ | $e^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$ | ↘ | $-17e^{-\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}$ | ↗ |

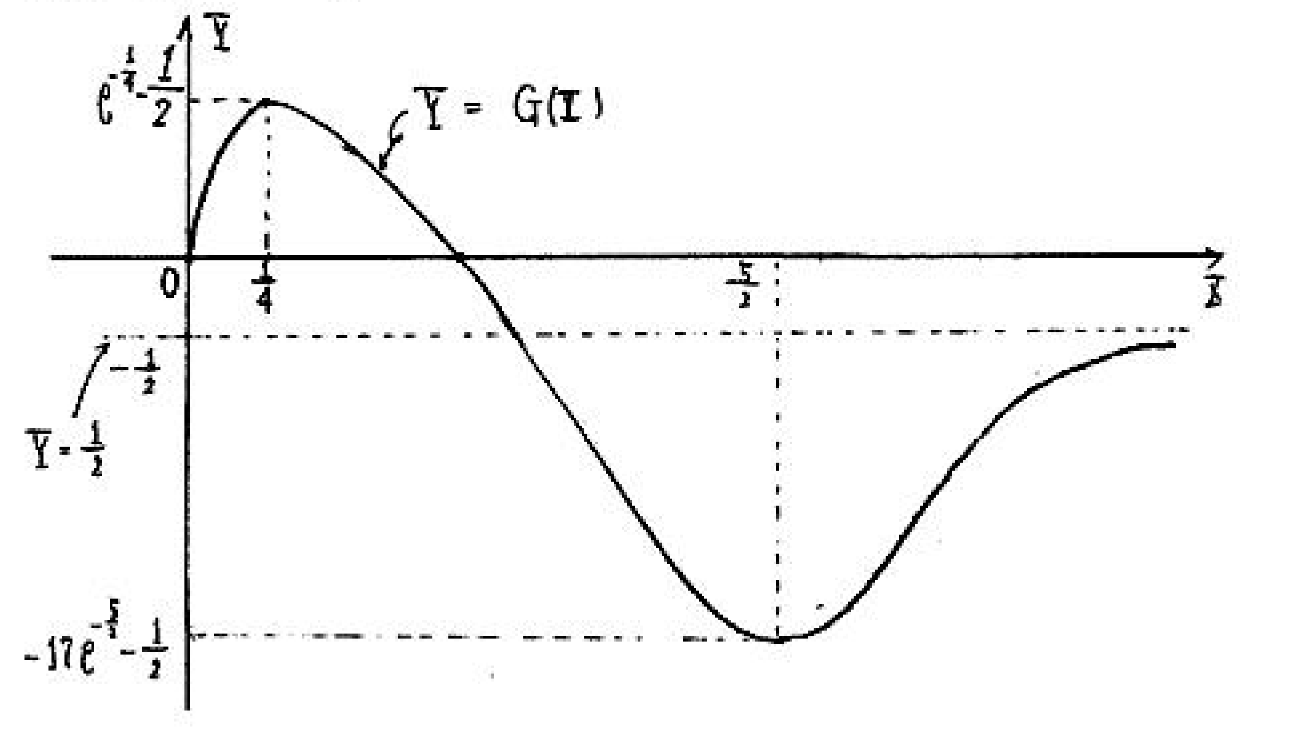
極大　　極小




また、

$\lim_{x \to +\infty} G(x) = -\frac{1}{2}$.

したがって、$Y = G(X)\ (X \geqq 0)$ のグラフは、次の通り。




よって、求める $g(u)$ の範囲は、

$-17e^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \leqq g(u) \leqq e^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

……(答)