

I

(1)

微分すると $y' = 6x^2 - 30x + 36$

$y' = 0$ となる x を求めればよいから,

$$6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2, 3$$

よって, (答) $x = 2, 3$

(2)

与えられた数列の階差数列は,

$3, 4, 5, 6, 7, \dots$

と, 一般項が $n+2$ の数列となっている.

よって, $n \geq 2$ のとき一般項 a_n は,

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) \\ &= 5 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 2(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3 \end{aligned}$$

これは $n=1$ でも成立する. よって一般項 $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 3$ となる.

求めるのは 100 項目だから $n=100$ を代入して,

$$\begin{aligned} a_{100} &= \frac{1}{2} \cdot 100^2 + \frac{3}{2} \cdot 100 + 3 \\ &= 5153 \end{aligned}$$

よって, (答) 5153

(3)

$$\begin{aligned} {}_{100}C_1 \times {}_{99}C_2 &= 100 \cdot 99 \cdot 49 \\ &= 485100 \end{aligned}$$

よって, (答) 485100 通り

(4)

$$ax + b = x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + (3-a)x + (2-b) = 0 \dots \textcircled{1}$$

①式の右辺に関して判別式を D とおくと, 条件は $D=0$ であるから,

$$D = (3-a)^2 - 4(2-b) = 0$$

$$a^2 - 6a + 9 + 4b - 8 = 0$$

$$a^2 - 6a + 4b + 1 = 0$$

よって, (答) $a^2 - 6a + 4b + 1 = 0$

(5)

$9^x = 3^{2x}$, $27^{5-x} = 3^{15-3x}$, $81^{2x+1} = 3^{8x+4}$ であり, $y=3^x$ は単調増加なので,

$$2x < 15 - 3x < 8x + 4 \dots \textcircled{2}$$

を解けばよいことになる. ②の左側の不等号に関して,

$$2x < 15 - 3x$$

$$5x < 15$$

$$x < 3 \dots \textcircled{3}$$

右側の不等号に関して,

$$15 - 3x < 8x + 4$$

$$-11x < -11$$

$$x > 1 \dots \textcircled{4}$$

③, ④より, (答) $1 < x < 3$

II

(1)

9枚のカードを並べるから, $9! = 362880$

よって, (答) 362880 通り

(2)

(i)

3枚のカードの和が奇数となるのは, 3枚奇数もしくは2枚偶数1枚奇数の場合である.

今回, 奇数のカードは (1, 3, 5, 7, 9) の5枚, 偶数のカードは (2, 4, 6, 8) の4枚である.

よって求める場合の数は, 1枚ずつ偶数と奇数を考慮して並べればよいから,

$$({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 + {}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times 3) \times 6!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!$$

である. すべての並び方は $9!$ であるので求める確率は,

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!}{9!} = \frac{10}{21}$$

となる. また偶数となるのは奇数となる事象の余事象だから,

$$1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

よって, (答) 奇数となる確率: $\frac{10}{21}$, 偶数となる確率: $\frac{11}{21}$

(ii)

和が8以下となるのは, (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4) の組み合わせのみである.

よって, 求める場合の数は, これら3枚の並びかたと残りの6枚の並び方を考慮して,

$$3! \times 4 \times 6! \text{ となる}$$

以上より求める確率は,

$$\frac{3! \times 4 \times 6!}{9!} = \frac{1}{21} \quad (\text{答})$$

となる.

III

(1)

t は時刻であるから $t \geq 0$ と考えられる.

このとき $x > 0, y > 0$ であるから, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (2t + 2) (2t^2 - 5t + 5) \\ &= \underline{2t^3 - 3t^2 + 5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

$0 < t < 2$ で S を微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 6t^2 - 6t \\ &= 6t(t - 1) \end{aligned}$$

$0 < t < 2$ で $\frac{dS}{dt} = 0$ となる t は $t = 1$ である. よって増減表は以下の通り.

t	0		1		2
$\frac{dS}{dt}$		-	0	+	
S	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	9

よって S は, $t = 2$ のとき最大値 9, $t = 1$ のとき最小値 4 をとる. (答)