

I

(1)

与式の判別式を D とする. 条件は $D > 0$ である.

$$D = k^2 - 4 \cdot 2k > 0$$

$$k^2 - 8k > 0$$

$$k(k - 8) > 0$$

$$\underline{k < 0, 8 < k \quad (\text{答})}$$

(2)

$y' = 3x^2 - 2$ であるので, 求める接線は,

$$y = (3 \cdot (-1)^2 - 2)(x + 1) + 1$$

$$= x + 2$$

よって求める接線は, (答) $y = x + 2$

(3)

点 $(-1, 1)$ における接線は前問で求めた通り, $y = x + 2$ である. これと $y = x^2$ との交点は,

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

区間 $-1 < x < 2$ では $x + 2 > x^2$ であるので, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

よって, (答) $\frac{9}{2}$

(4)

初項を a , 公比を r とする. $r = 1$ だとすると,

$10a = 100, 20a - 10a = 200$ が成立するが, これは矛盾.

よって以降 $r \neq 1$ とする.

このとき, 条件から $\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 100 \dots \textcircled{1}, \frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 300 \dots \textcircled{2}$ であるので,

$\textcircled{2}$ を $\frac{a(1-r^{10})}{1-r} \cdot (1+r^{10}) = 300$ と変形して $\textcircled{1}$ を代入すると,

$$100 \cdot (1+r^{10}) = 300$$

$$1+r^{10} = 3$$

$$r^{10} = 2 \dots \textcircled{3}$$

が求まる. $\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$\frac{a(1-2)}{1-r} = 100$$

$$\frac{a}{1-r} = -100 \dots \textcircled{4}$$

が求まる. 求める $\frac{a(1-r^{30})}{1-r} - \frac{a(1-r^{20})}{1-r}$ は, $\textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$ を代入して,

$$\begin{aligned} \frac{a(1-r^{30})}{1-r} - \frac{a(1-r^{20})}{1-r} &= -100 \cdot (1-2^3) - 300 \\ &= 700 - 300 \\ &= 400 \end{aligned}$$

よって, (答) 400

(5)

$3 < 5 < 9$ だから $\log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9$, つまり $1 < \log_3 5 < 2 \dots \textcircled{5}$ である.

$1 < 2 < \sqrt{5}$ だから $\log_5 1 < \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5}$, つまり $0 < \log_5 2 < \frac{1}{2} \dots \textcircled{6}$ である.

$\sqrt{7} < 3 < 7$ だから $\log_7 \sqrt{7} < \log_7 3 < \log_7 7$, つまり $\frac{1}{2} < \log_7 3 < 1 \dots \textcircled{7}$ である.

$\textcircled{5}, \textcircled{6}, \textcircled{7}$ より,

(答) $\log_5 2 < \frac{1}{2} < \log_7 3 < \log_3 5$

II

(1)

$b > 1$ より接するのは $y > 0$ の領域だから、円の方程式は $y = \sqrt{1-x^2}$ として問題ない.

$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ だから、接点を $(t, \sqrt{1-t^2})$ とおくと接線は、

$$y = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdots \textcircled{1}$$

となる. ①が点 $(0, b)$ を通るから代入して t を求めると、

$$b = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$1-t^2 = \frac{1}{b^2}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} \cdots \textcircled{2}$$

となる. ②を①に代入して、

$$\begin{aligned} y &= -b \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} \right) x + b \\ &= \underline{\underline{\pm \sqrt{b^2-1}x + b}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

$y = -\sqrt{b^2-1}x + b$ と $y = -1$ の交点を求めると、

$$-1 = -\sqrt{b^2-1}x + b$$

$$\sqrt{b^2-1}x = b+1$$

$$x = \frac{b+1}{\sqrt{b^2-1}} \cdots \textcircled{3}$$

左右対称であるので③を2倍して、(答) $\underline{\underline{\frac{2(b+1)}{\sqrt{b^2-1}}}}$

(3)

高さは $b+1$ である. 正三角形の (底辺) : (高さ) は $2 : \sqrt{3}$ であるので、

$$\frac{2\sqrt{3}(b+1)}{\sqrt{b^2-1}} = 2(1+b)$$

$$3 = b^2 - 1 \quad (b > 1 \text{ より})$$

$$b^2 = 4$$

$$b = \pm 2$$

$b > 1$ であるので、(答) $\underline{\underline{b=2}}$

III

(1)

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

P は OA 上にあるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= 2t\overrightarrow{OA} \\ &= 2t\vec{a} \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる.

①, ②より $\overrightarrow{PQ}$ は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -2t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

P は AB 上にあるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + (2t-1)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (-2t+2)\overrightarrow{OA} + (2t-1)\overrightarrow{OB} \\ &= (-2t+2)\vec{a} + (2t-1)\vec{b} \cdots \textcircled{3} \\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる.

③, ④より $\overrightarrow{PQ}$ は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= 2(t-1)\vec{a} + (-3t+2)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

よって,

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{cases} -2t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} & (0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(t-1)\vec{a} + (-3t+2)\vec{b} + t\vec{c} & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

四面体 OABC は正四面体なので,

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| = 1$ であり,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ となる.

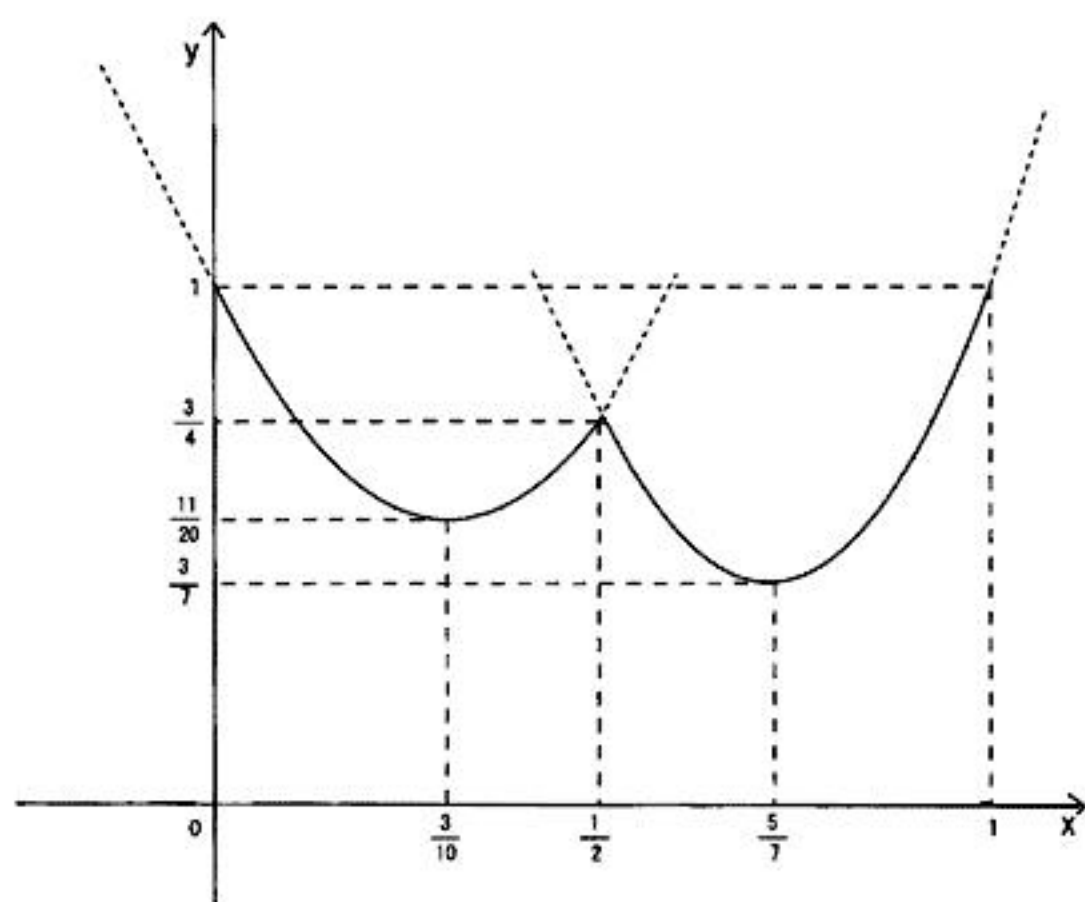
$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= (1-t)^2 + t^2 + (-2t)^2 + 2t(1-t)\frac{1}{2} - 4t^2\frac{1}{2} - 4t(1-t)\frac{1}{2} \\ &= 5t^2 - 3t + 1 \\ &= 5\left(t - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20} \cdots \textcircled{5}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 4(t-1)^2 + (-3t+2)^2 + t^2 \\ &\quad + 4(t-1)(-3t+2)\frac{1}{2} + 2t(-3t+2)\frac{1}{2} + 4t(t-1)\frac{1}{2} \\ &= 7t^2 - 10t + 4 \\ &= 7\left(t - \frac{5}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} \cdots \textcircled{6}\end{aligned}$$

⑤, ⑥より $|\overrightarrow{PQ}|^2$ に関しての t による大きさの変化は以下のグラフのようになる.



よってグラフより $t=0, 1$ のとき $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は最大値 1 をとり,

$t = \frac{5}{7}$ のとき $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は最小値 $\frac{3}{7}$ をとる.

よって, $|\overrightarrow{PQ}|$ の最大値, 最小値は.

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } 1 \quad (t=0, 1 \text{ のとき}), \text{ 最小値: } \frac{\sqrt{21}}{7} \quad \left(t = \frac{5}{7} \text{ のとき}\right)$$