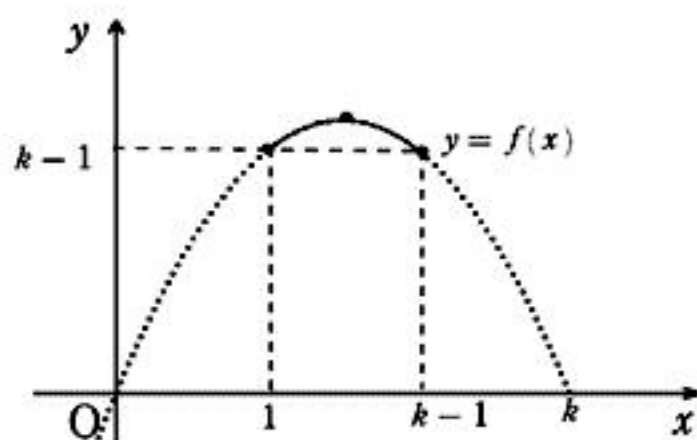
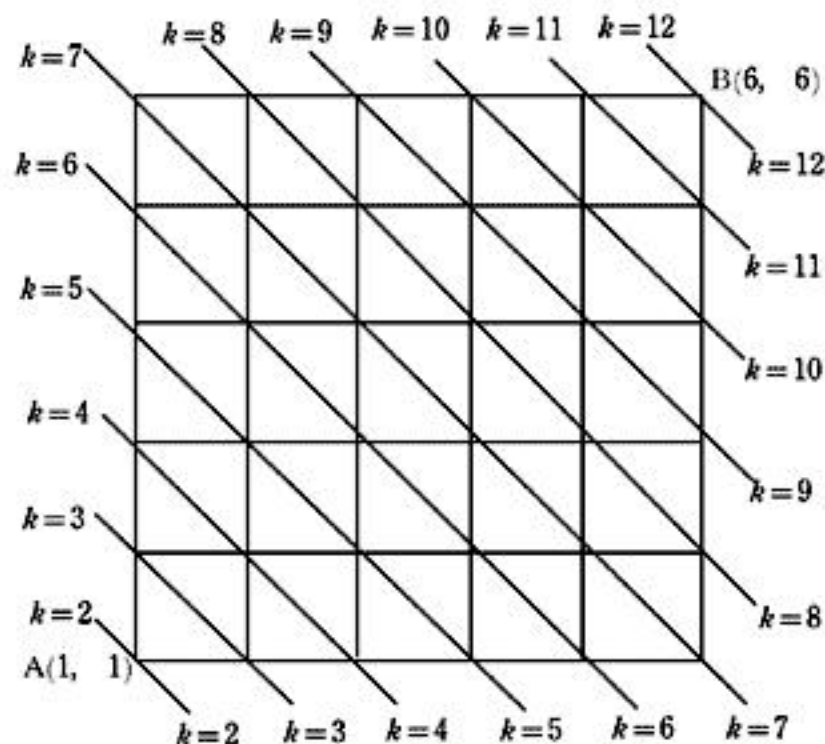


I
問1

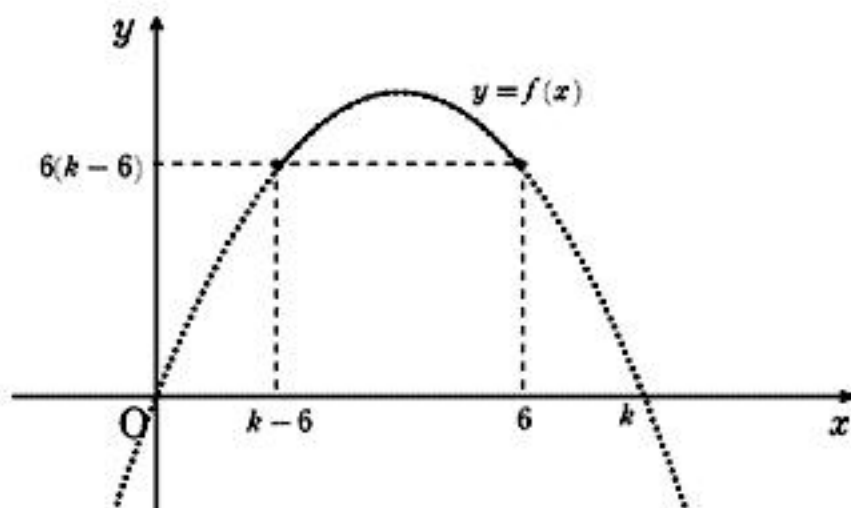
- (i) $k=2, \dots, 7$, のとき下図より $1 \leq x \leq k-1$ (x : 整数) ... ①

$f(x) = x(k-x)$ のグラフにおいて,



- ①より $f(x)$ が最小となるのは $x=1, k-1$ のとき,
よって $X(k)=1, k-1$... (答)

- (ii) $k=8, \dots, 12$ のとき上図より
 $k-6 \leq x \leq 6$ (x : 整数) ... ②
 $f(x)$ のグラフ(右図)と②より
 $f(x)$ が最小となるのは $x=6, k-6$
のとき, $y=k-x$ に代入することで,
 $Y(k)=6, k-6$... (答)



問2

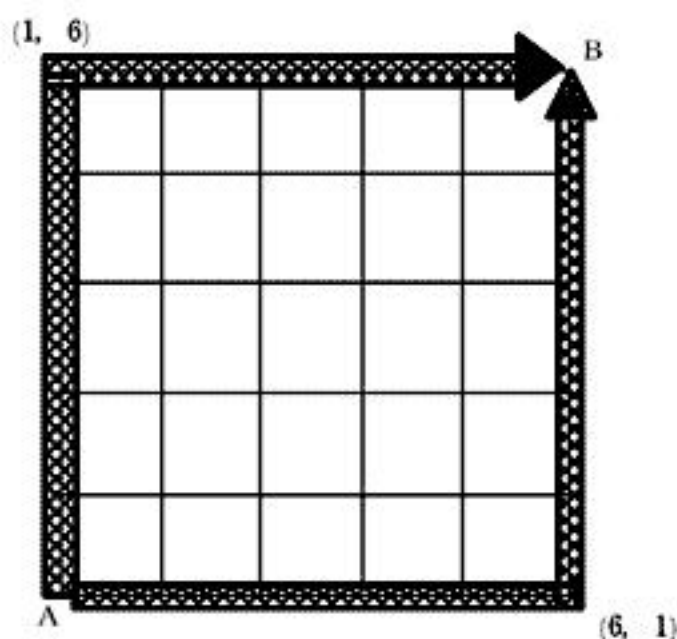
問1より, 各 k に対し xy が最小になるのは,
碁盤の目の内, 最も外側に位置する点のとき
である.

x 軸正方向, または y 軸正方向に長さ1だけ
進むと k の値が1増加し, 各 k に対して最も
外側を通れば荷物の個数は最小となる.

したがって, 荷物の個数の最小値は

$$\sum_{x=1}^6 (x \cdot 1) + \sum_{y=2}^6 (6 \cdot y) = 141 \dots (\text{答})$$

道順は右上図に示す 2 通り ... (答)



II 問 1

$$\begin{aligned} z + i\bar{z} &= (x + iy) + i(x - iy) \\ &= x + iy + ix + y \\ &= (x + y) + i(x + y) \end{aligned}$$

$$\therefore R(x, y) = x + y \dots (\text{答})$$

問 2

$$\begin{aligned} R(x, y) &= x + y = \cos\theta + \sin\theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ (R(x, y))^2 &= (\sqrt{2})^2 \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \frac{1 - \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \\ &= 1 - \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 + \sin 2\theta \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ より $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{3}$ なので

$$0 \leq \sin 2\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、 $(R(x, y))^2$ について

$$\left. \begin{array}{l} \text{最大値は } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき}\right) \\ \text{最小値は } 1 \quad \quad \quad \left(\theta = 0 \text{ のとき}\right) \end{array} \right\} \dots (\text{答})$$

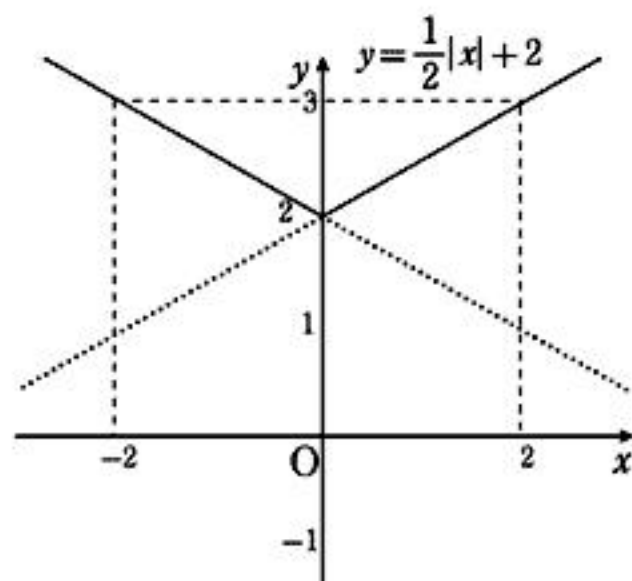
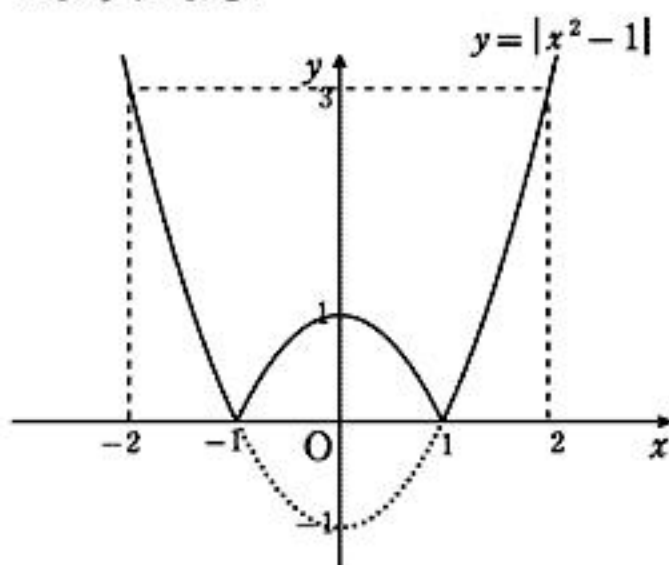
となる。

Ⅲ 問1

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1, 1 \leq x) \\ -x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}|x| + 2 = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

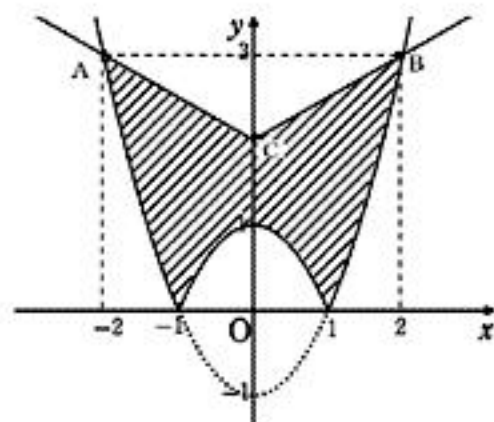
より, $y = |x^2 - 1|$ のグラフは左下図, $y = \frac{1}{2}|x| + 2$ のグラフは右下図のようになる.



問2

求めるべき面積 S は右図の斜線部の面積.
ゆえに

$$S = \left(\begin{array}{l} \text{直線 AB と} \\ y = x^2 - 1 \text{ で} \\ \text{囲まれた領域} \\ \text{の面積} \end{array} \right) - 2 \left(\begin{array}{l} x \text{ 軸と} \\ y = x^2 - 1 \text{ で} \\ \text{囲まれた領域} \\ \text{の面積} \end{array} \right) - (\triangle ABC \text{ の面積})$$



$$= \int_{-2}^2 \{3 - (x^2 - 1)\} dx - 2 \int_{-1}^1 \{0 - (x^2 - 1)\} dx - \frac{1}{2} \{2 - (-2)\} \cdot (3 - 2)$$

$$= - \int_{-2}^2 (x + 2)(x - 2) dx - 2(-1) \int_{-1}^1 (x + 1)(x - 1) dx - 2$$

$$= \frac{1}{6} \{2 - (-2)\}^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 - 2$$

$$= 6 \dots (\text{答})$$

IV 問 1

求めるべき確率は

$$\begin{aligned}& 1 - (\text{同じ番号が 1 つもない確率}) \\&= 1 - \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \\&= \frac{62}{125} \dots (\text{答})\end{aligned}$$

問 2

取り出し終わったボールの番号の組み合わせは $_{10}C_4$ 通り.

そのうち、記録した番号に 1 がある組み合わせは、2 から 10 までの番号のついた 9 個のボールの中から、3 つを取り出す組み合わせに等しく、 $_9C_3$ 通り.

よって、求めるべき確率は

$$\frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{2}{5} \dots (\text{答})$$