

I

ア	h
イ	f
ウ	k
エ	g
オ	q

II

カ	e
キ	d
ク	g
ケ	h
コ	g

III

(1) $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ ($x > 0$) について

$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } \log x = 0, 2 \text{ より } x = 1, e^2$$

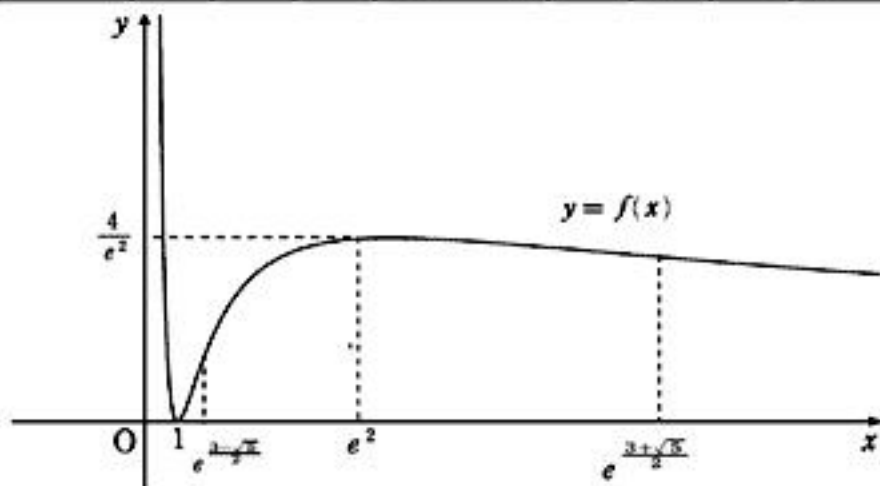
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\{2\log x - (\log x)^2\}' x^2 - \{2\log x - (\log x)^2\} \cdot (x^2)'}{x^4} \\ &= \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{x} - 2\log x \cdot \frac{1}{x}\right) x^2 - \{2\log x - (\log x)^2\} \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2}{x^3} \{(\log x)^2 - 3\log x + 1\} = \frac{2}{x^3} \left(\log x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(\log x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると } \log x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ より } x = e^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)^2}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0 \text{ より,}$$

関数 $f(x)$ の増減表およびグラフは以下のようになる。

x	...	1	...	$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	...	e^2	...	$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$		0		$f(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})$		$\frac{4}{e^2}$		$f(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$	



(2) (1) より $0 < x < e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} < x$ で $f''(x) > 0$

$$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \text{ で } f''(x) < 0$$

$$x = e^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \text{ で } f''(x) = 0$$

ゆえに, C は 2 つの変曲点を持つ。

$$(1) \text{ の計算より } \log \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \log \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(3) 求める面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

ここで, $\log x = t$ とおくと, $x: \alpha \rightarrow \beta$ のとき $t: \frac{3-\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ であり,

$$\frac{1}{x} dx = dt \text{ なので}$$

$$S = \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} t^2 \cdot dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right\}$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{5} \quad (\text{答})$$

IV

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\
 &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \\
 &= 4\cos^3 x - 3\cos x \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{上式より } f(x) &= 2 - 2\cos^3 x + (4\cos^3 x - 3\cos x) \\
 &= 2\cos^3 x - 3\cos x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6\cos^2 x(-\sin x) - 3(-\sin x) \\
 &= -6\cos^2 x \sin x + 3\sin x \\
 &= 3\sin x(1 - 2\cos^2 x) \\
 &= 3\sin x(1 + \sqrt{2}\cos x)(1 - \sqrt{2}\cos x)
 \end{aligned}$$

したがって、 $0 \leq x \leq \pi$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$2 - \sqrt{2}$	$\nearrow$	$2 + \sqrt{2}$	$\searrow$	3

ゆえに、 $f(x)$ は、 $x = \frac{3}{4}\pi$ のとき最大値 $2 + \sqrt{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$ のとき 最小値 $2 - \sqrt{2}$ をとる。

(2) $f'(s) = 0$ のとき、点 $(s, f(s))$ における法線は、 y 軸に平行になるから、 y 軸と共有点を持たない。ゆえに、 $f'(s) \neq 0$ 。

したがって、法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(s)}(x - s) + f(s)$$

$x = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned}
 k(s) &= \frac{s}{f'(s)} + f(s) \\
 &= \frac{s}{3\sin s(1 - 2\cos^2 s)} + 2\cos^3 s - 3\cos s + 2 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} k(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3 \frac{\sin s}{s} (1 - 2\cos^2 s)} + 2\cos^3 s - 3\cos s + 2 \right) \\
 &= \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1)} + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \\
 &= -\frac{1}{3} + 1 \\
 &= \frac{2}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$