

I

$$(1) \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy}$$

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{10} \\ xy = 2 \end{cases} \text{より} \frac{\sqrt{10}^2 - 2 \cdot 2}{2} = 3 \quad \therefore 3 //$$

$$(2) a_2 = \frac{2a_1 - 1}{a_1 + 3} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4} + 3} = \frac{2-4}{1+12} = -\frac{2}{13}$$

$$a_4 = \frac{-\frac{4}{13} - 1}{-\frac{2}{13} + 3} = \frac{-4-13}{-2+39} = -\frac{17}{37}, \quad a_5 = \frac{-\frac{34}{37} - 1}{-\frac{17}{37} + 3} = \frac{-34-37}{-17+111} = -\frac{71}{94} //$$

(3) できる長方形の個数は、縦の線2本と横の線2本の選び方と一致するので
 $5C_2 \times 6C_2 = 150 \quad \therefore 150 \text{個} //$

$$(4) y = -x^2 + 2px = -(x-p)^2 + p^2 \text{ より } \begin{cases} x=p \\ y=p^2 \end{cases} \quad \therefore y=x^2 //$$

$$(5) y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4 \text{ より } y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$$

x	...	-1	...	2	...	おて左表より
y'	+	0	-	0	+	極大値: 11
y	↑	極大	↓	極小	↑	極小値: -16

$$(6) \text{実数解を持たない時 (判別式)} = a^2 - 4b < 0 \Leftrightarrow a^2 < 4b - \textcircled{1}$$

$$(i) a=1 \text{ の時 } b=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

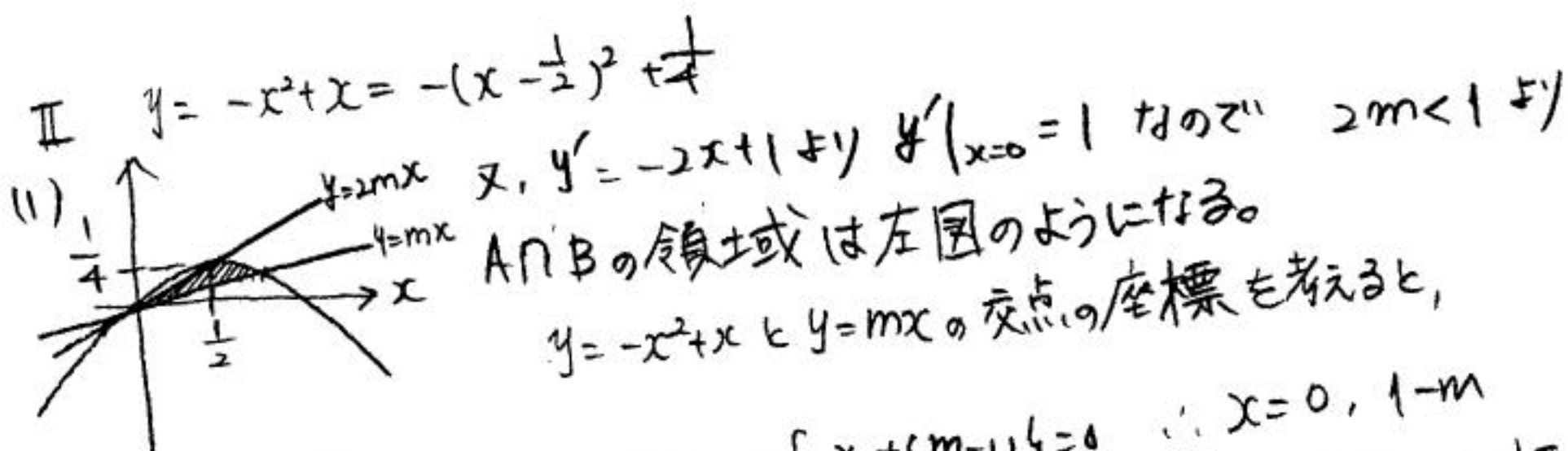
$$(ii) a=2 \text{ の時 } b=2, 3, 4, 5, 6$$

$$(iii) a=3 \text{ の時 } b=3, 4, 5, 6$$

$$(iv) a=4 \text{ の時 } b=5, 6$$

$$(v) a=5, 6 \text{ の時 } \textcircled{1} \text{ も満たさず } b \text{ は存在しない,}$$

$$\text{以上より } \frac{17}{36} //$$



$x^2 + (m-1)x = 0$ より $x\{x + (m-1)\} = 0 \therefore x = 0, 1-m$

よって $(1-m, m(1-m))$ となる。又, $y = -x^2 + x$ と $y = 2mx$ の交点の座標は $(1-2m, 2m(1-2m))$ である。

よって
$$S = (1-2m) \times 2m(1-2m) \times \frac{1}{2} + \int_{1-2m}^{1-m} (-x^2 + x) dx - (1-m) \times m(1-m) \times \frac{1}{2}$$

$$= m(1-2m)^2 - \frac{1}{2}m(1-m)^2 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{7}{3}m^3$$

$$= \frac{7}{6}m^3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$$

$\therefore S = \frac{7}{6}m^3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$

2) $f(m) = \frac{7}{6}m^3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$ とおくと,

$$f'(m) = \frac{7}{2}m^2 - 3m + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\left(m - \frac{3-\sqrt{2}}{7}\right)\left(m - \frac{3+\sqrt{2}}{7}\right)$$

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ より

$$\begin{cases} \frac{1.58}{7} < \frac{3-\sqrt{2}}{7} < \frac{1.59}{7} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < \frac{4.41}{7} < \frac{3+\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

より左表を得る。

m	0	"	$\frac{3-\sqrt{2}}{7}$	"	$\frac{1}{2}$
f'(m)		+	0	-	
f(m)		↑	極大	↓	

よって $S = f(m)$ を最大にする m は

$$m = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

III

(1) n 回操作を行った時の容器 A 内の a の量を a_n とおくと,

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ と表すことができる。}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0.1 \Leftrightarrow n(\log_{10} 2^2 - \log_{10} \frac{10}{2}) \leq \log_{10} 10^{-1}$$

$$\Leftrightarrow n(2\log_{10} 2 - 1 + \log_{10} 2) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow n(3 \times 0.3010 - 1) \leq -1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{0.097} = \frac{1000}{97} > 10$$

$\therefore$ 11 回以上

//

(2) 容器 A と B 内にある液体 a の総量は 1 l で一定であるので;

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ [l]}$$

//

(3) 1 回の操作で B には 0.2 l の液体が移されるので、液体の量は $0.2 \times 100 = 20$ l

a の量は $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{100}$ であり,

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)^{100} &= b \text{ とおくと, } \log_{10} b = 100(\log_{10} 2^2 - \log_{10} \frac{10}{2}) \\ &= -100 \times 0.097 = -9.7 \end{aligned}$$

よって $\frac{b}{20} \times 100$ の小数第 1 位を四捨五入すると 0.

$$\text{よって } \frac{1}{20} \times 100 = 5 [\%]$$

//