

1

$$(1) \quad ax+2=x+a^2 \text{ より}$$

$$(a-1)x=a^2-2 \quad \dots \textcircled{1}$$

(i) $a=1$ のとき, ①は $0 \cdot x=-1$ となり①を満たす x の値はない.

$$(ii) \quad a \neq 1 \text{ のとき, ①より } x = \frac{a^2-2}{a-1}$$

以上より,

$$a=1 \text{ のとき, 解なし. } a \neq 1 \text{ のとき, } x = \frac{a^2-2}{a-1} \quad \dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \text{赤球が1回も取り出されない確率は} \left(\frac{8}{14}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\text{求める確率はその余事象の確率だから } 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \quad \dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \text{売価を } x \text{ 円とすると, 売り上げの個数の増減は } \frac{x-600}{10} \cdot (-5) = \frac{600-x}{2} \text{ 個 である,}$$

よって売り上げは,

$$\begin{aligned} x \cdot \left(500 + \frac{600-x}{2}\right) &= x \left(800 - \frac{1}{2}x\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 800x \\ &= -\frac{1}{2}(x-800)^2 + 320000 \end{aligned}$$

したがって,

$$\text{最大の売り上げを得るための売価は } 800 \text{ 円} \quad \dots(\text{答})$$

$$(4) \quad y = x^3 - p^2x \text{ より, } y' = 3x^2 - p^2$$

$p=0$ のとき, $y' \geq 0$ で $y = x^3 - p^2x$ のグラフは極大点を持たない.

$$p \neq 0 \text{ のとき, } y' = 3 \left(x + \frac{p}{\sqrt{3}}\right) \left(x - \frac{p}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(i) p > 0 \text{ のとき, 極大点は } \left(-\frac{p}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9} p^3\right)$$

$$X = -\frac{p}{\sqrt{3}}, Y = \frac{2\sqrt{3}}{9} p^3 \text{ から } p \text{ を消去して}$$

$$Y = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (-\sqrt{3}X)^3 = -2X^3 \quad \text{よって, } Y = -2X^3 \quad (X < 0)$$

$$(ii) p < 0 \text{ のとき, 極大点は } \left(\frac{p}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{9} p^3\right)$$

$$X = \frac{p}{\sqrt{3}}, Y = -\frac{2\sqrt{3}}{9} p^3 \text{ から } p \text{ を消去して,}$$

$$Y = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (\sqrt{3}X)^3 = -2X^3 \quad (X < 0)$$

以上より,

$$Y = -2X^3 \quad (X < 0) \quad \dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (5) \quad (\text{与式}) &= \left(\log_3 2 + \frac{2}{2\log_3 2}\right)^2 - \left(\log_3 2 + \frac{1}{-\log_3 2}\right)^2 \\ &= (\log_3 2)^2 + 2 + \left(\frac{1}{\log_3 2}\right)^2 - \left\{(\log_3 2)^2 - 2 + \left(\frac{1}{\log_3 2}\right)^2\right\} \\ &= 4 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(6)

- ・一万の位が1である数, 2である数, 3である数は, それぞれ $4! = 24$ 個ある.
- ・一万の位が4, 千の位が1である数は $3!$ 個ある.
- ・一万の位が4, 千の位が2であって, 百の位が1, 3である数はそれぞれ 2 個ある.
- ・一万の位が4, 千の位が2, 百の位が5である数で最小の数が 42513 である.

$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 4! \text{ 個}$
 $2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 4! \text{ 個}$
 $3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 4! \text{ 個}$
 $4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 3! \text{ 個}$
 $4 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 2 \text{ 個}$
 $4 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ \dots\dots\dots 2 \text{ 個}$
 $4 \ 2 \ 5 \ 1 \ 3$

したがって,

$$4! \cdot 3 + 3! \cdot 2 + 1 = 24 \cdot 3 + 6 + 4 + 1 = 83$$

以上より,

$$83 \text{ 番目} \quad \dots\dots(\text{答})$$

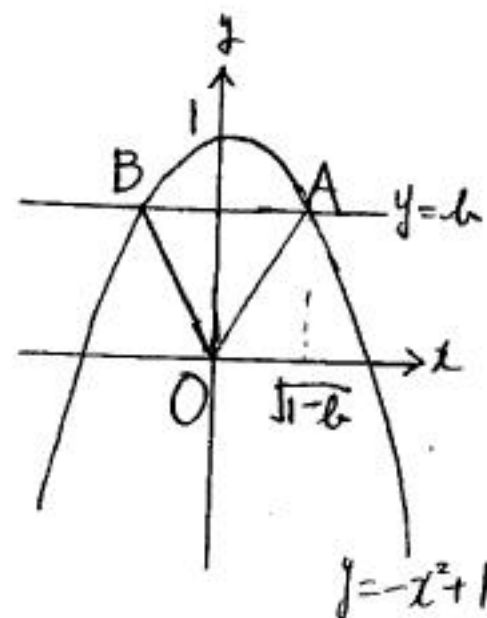
II.

対称性から $x_2 < x_1$ として一般性を失わない。

放物線と直線が 2 点で交わるから $h < 1$ である。

$-x^2 + 1 = h$ より $x = \pm\sqrt{1-h}$ よって $x_1 = \sqrt{1-h}$ なの？

$$A(\sqrt{1-h}, h) \quad B(-\sqrt{1-h}, h)$$



(1) 三角形 ABO が 直角三角形になるのは

$\angle AOB = 90^\circ$ のときであるから $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

$$\text{よって } \sqrt{1-h}(-\sqrt{1-h}) + h^2 = 0$$

$$h^2 + h - 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(2) $0 < h < 1$ である。

(i) $AB = 2\sqrt{1-h}$, O と直線 AB との距離は h であるから

三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-h} \cdot h = h\sqrt{1-h} = \sqrt{h^2(1-h)} = \sqrt{h^2 - h^3}$

$f(h) = h^2 - h^3$ とおくと $f'(h) = -3h^2 + 2h = -3h(h - \frac{2}{3})$ 。

右の増減表より $h = \frac{2}{3}$ で $f(h)$ は最大。

面積 $\sqrt{f(h)}$ も最大となる。面積の最大値は

$$\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

h	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(h)$		+	0	-	
$f(h)$		↗	最大	↘	

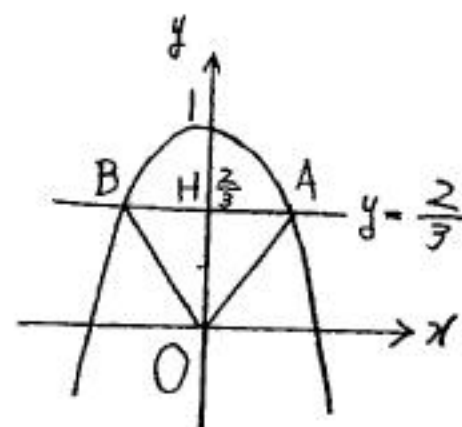
(ii) $h = \frac{2}{3}$ のとき

直線 AB と y 軸との交点を H とすると

$$OH = h = \frac{2}{3} \quad AH = \sqrt{1-h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$OH > AH$ より $\angle AOH < 45^\circ$

よって $\angle AOB = 2\angle AOH < 90^\circ$



III.

(1) Pが原点に戻るのは、1回目はどの目が出てよく、2回目に1回目と逆向きに移動するときだから、その確率は $\frac{1}{6}$.

Qが原点に戻る確率も同様に $\frac{1}{6}$

したがって ともに原点に戻る確率は $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}$

(2) $|\vec{PQ}| = 4$ となるのは $\vec{OP} = -\vec{OQ}$, $|\vec{OP}| + |\vec{OQ}| = 2$ のときだから、
(大1回目, 大2回目, 小1回目, 小2回目) の目の出方が

(1, 1, 4, 4) (2, 2, 5, 5) (3, 3, 6, 6)

(4, 4, 1, 1) (5, 5, 2, 2) (6, 6, 3, 3) の4通りの場合である.

求める確率は $\frac{6}{6^4} = \underline{\underline{\frac{1}{216}}}$

(3) $|\vec{OP}|, |\vec{OQ}|$ として考えられるのは 2, $\sqrt{3}$, 1, 0 の4通りであり

$3.5 < |\vec{PQ}| < |\vec{OP}| + |\vec{OQ}|$ より $3.5 < |\vec{OP}| + |\vec{OQ}|$ であることが必要.

よって $3.5 < |\vec{PQ}|$ となるのは

$(|\vec{OP}|, |\vec{OQ}|) = (2, 2), (2, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 2)$ のいずれかのときである.

(i) $(|\vec{OP}|, |\vec{OQ}|) = (2, 2)$ のとき

$\angle POQ$ は $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ のいずれかであるから. $|\vec{PQ}| > 3.5$ と

なるのは 3点 P, O, Qが一直線上になるとき ($\angle POQ = 180^\circ$) である

(2) より その確率は $\frac{1}{6^3}$