

I. 問1 $n=1$ のとき $(x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)$ より $a_1 = 5$

$n=2$ のとき $(x, y) = (\pm 2, 0), (0, \pm 2), (\pm 1, \pm 1)$ (複号任意)
 $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)$ より $a_2 = 13$

$n=3$ のとき $|x| + |y| = 3$ を満たす点か $3 \times 4 = 12$ 個

$|x| + |y| \leq 2$ を満たす点か $a_2 = 13$ 個

$$a_3 = 13 + 12 = \underline{\underline{25}}$$

$n=4$ のとき $|x| + |y| = 4$ を満たす点か $4 \times 4 = 16$ 個

$|x| + |y| \leq 3$ を満たす点か $a_3 = 25$ 個

$$a_4 = 25 + 16 = \underline{\underline{41}}$$

問2 $|x| + |y| = n$ を満たす点か $4n$ 個ある

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 4n$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 4(n+1)$$

したがって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} 4(k+1)$$

$$= 5 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1)$$

$$= 2n^2 + 2n + 1$$

$n=1$ のときも成り立つ。

$$\underline{\underline{a_n = 2n^2 + 2n + 1}}$$

II.

円 C の面積は 4π である.

問 1

図のような座標平面上で, 長方形 PQRS

の面積が円 C の面積の $\frac{1}{2}$ であるとする.

$0 < b \leq a$ とする.

斜線部の面積について $ab = \frac{\pi}{2}$ ①

また 点 P は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点であるから

$$a^2 + b^2 = 4 \text{②}$$

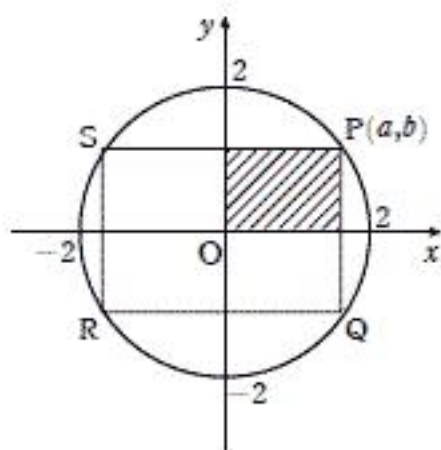
$$\text{①②より } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + \pi$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4 - \pi$$

$$\text{より } a+b = \sqrt{4+\pi}, a-b = \sqrt{4-\pi}$$

$$\text{したがって (長辺の長さ)} = 2a = \frac{\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}}{2}$$

$$\text{(短辺の長さ)} = 2b = \frac{\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}}{2}$$



問 2

円 $C: x^2 + y^2 = 4$ に内接する正方形の 1 つの頂点が (a, a) であるように図のように座標軸をとる. ここで $a > 0$ とする.

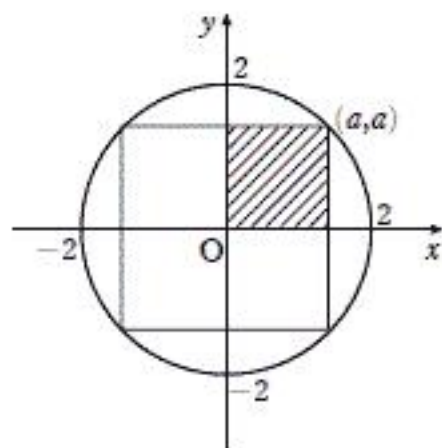
斜線部の面積について $a^2 = \frac{\pi}{2}$ ①

一方, 点 (a, a) は円 C 上の点であるから

$$a^2 + a^2 = 4 \text{ より } a^2 = 2 \text{②}$$

①②は矛盾

したがって 円 C に内接する正方形の面積は C の面積の $\frac{1}{2}$ になり得ない.



IV

$$(1) f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 12a + 1$$

$$f(x) = (x - a + 1)^2 + a^2 - 10a$$

$$\therefore A = a^2 - 10a$$

$$(2) a \leq x \text{ 且 } B = f(a) = a^2 - 10a + 1$$

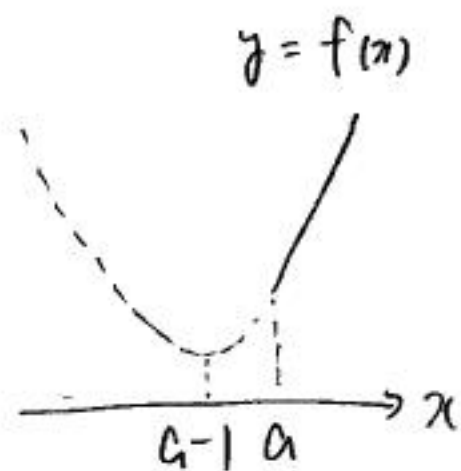
$$(3) \text{ 判别式 } \Delta \in D \text{ 且 } \Delta' < \varepsilon \quad D > 0$$

$$\Delta/4 = (a-1)^2 - (2a^2 - 12a + 1)$$

$$= -a^2 + 10a > 0$$

$$a(a-10) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 10$$



IV

1 時刻 $t=3$ から初めて G に到る経路は

$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$ 又は $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$

$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}} D \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ も同じく $\frac{1}{24}$

$$\therefore \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

2 時刻 $t=3$ から初めて G に到る経路は

$C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow G$ 又は $C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$ 又は $C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$

$C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$C \xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{\frac{1}{3}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

$C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$C \xrightarrow{\frac{1}{4}} D \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

$C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ も同じく $\frac{1}{32}$

$$\therefore \frac{1}{48} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{12}$$

3 時刻 $t=4$ から初めて G に到る経路は

$B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ 又は $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$

又は $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow G$ 又は $B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$

又は $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$

$B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$B \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} B \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G$ も同じく $\frac{1}{64}$

$B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$B \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{\frac{1}{3}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{96}$$

$B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G$ に到るには

$$B \xrightarrow{\frac{1}{2}} A \xrightarrow{\frac{1}{3}} B \xrightarrow{\frac{1}{2}} C \xrightarrow{\frac{1}{4}} G \text{ である. } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

$$B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G \text{ も同じく } \frac{1}{48} \therefore \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96} = \frac{1}{12}$$