

$$f(x) = e^{-x} \cos \pi x \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x) = -e^{-x} \cos \pi x + e^{-x}(-\pi \sin \pi x) = -e^{-x}(\cos \pi x + \pi \sin \pi x) \quad \dots\dots ②$$

$$\text{これより, } f(0) = 1 \quad f'(0) = -1$$

∴ P_0 における C の接線は,

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y = -x + 1$$

よって, x_1 は, $0 = -x_1 + 1$ より, $x_1 = 1$

∴ ア : ㉔

$P_n(x_n, f(x_n))$ における接線を考える. この接線を $y = g_n(x)$ とすると

$$g_n(x) - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

これが $Q_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ を通るので

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\iff x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \dots\dots ③ \quad \text{が } x_{n+1} \text{ と } x_n \text{ に成り立つ.}$$

これに $n=1$ を代入すると,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

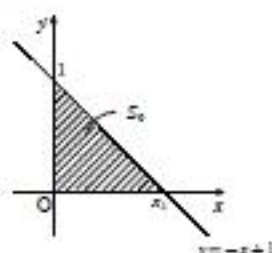
$$\text{より, } x_2 = 1 - \frac{\left(-\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = 2 \quad \left(\because f(1) = -\frac{1}{e}, f'(1) = \frac{1}{e}\right)$$

∴ イ : ㉕

また

$$S_0 = \frac{1}{2} \times (x_1 - 0) \times 1 = \frac{1}{2}$$

∴ ウ : ㉖



次に S_n を考える.

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ より, $x_k = k$ と仮定してみる. ($k \in 0, 1, 2, \dots$)

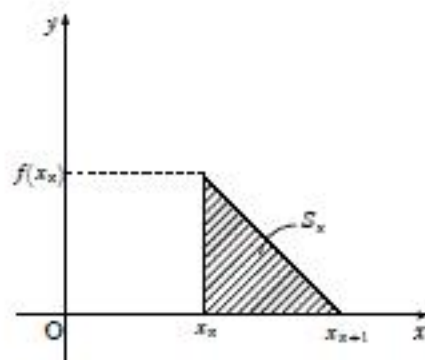
$n = k+1$ のとき, ③より,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = k + \frac{e^{-k} \cdot \cos \pi k}{e^{-k}(\cos \pi k + \pi \sin \pi k)} = k + 1$$

よって $n = k+1$ でも成立するので, $x_n = n$

これより, S_n は $S_n > 0$ より,

$$\begin{aligned} S_n &= \left| \frac{1}{2} \times (x_{n+1} - x_n) \times f(x_n) \right| \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times |e^{-n} \cos n\pi| \\ &= \frac{1}{2} e^{-n} \times |(-1)^n| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n \end{aligned}$$



$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \quad \left(\because \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0 \quad (n \rightarrow \infty)\right)$$

$$= \frac{e}{2(e-1)}$$

∴ エ : ㉗

また, $x > 0$ で $f(x) = 0$ となるものを考える.

つまり, $0 = e^{-x} \cos \pi x$ の解を求める. ここで, $e^{-x} \neq 0$ より,

$$\cos \pi x = 0$$

$$\text{これより, } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{である.}$$

また,

$$f''(x) = e^{-x} \{(1 - \pi^2) \cos \pi x + 2\pi \sin \pi x\}$$

$$f''(a_1) = -\pi e^{-\frac{1}{2}} < 0 \quad f''(a_1) = 2\pi e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

$$f''(a_2) = \pi e^{-\frac{3}{2}} > 0 \quad f''(a_2) = -2\pi e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

これより, オ : ㉘, カ : ㉙

$$(1) f(x) = x^3 - 3x, f'(x) = 3(x^2 - 1), f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき } x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$$

$$f''(x) = 0 \text{ のとき } 6x = 0 \quad \therefore x = 0$$

$f(x)$ の増減, グラフの凹凸は下表の通りとなる.

x		-1		0		1	
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$

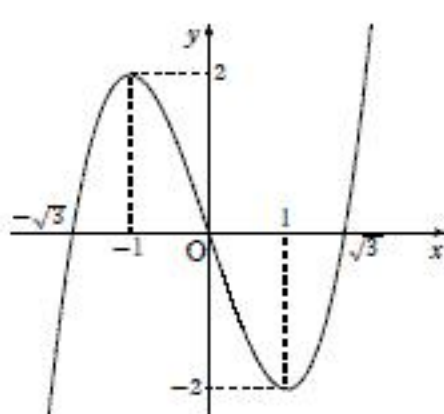
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

よって, $f(x)$ は $\begin{cases} x = -1 \text{ で極大値 } 2 \text{ をとる} \\ x = 1 \text{ で極小値 } -2 \text{ をとる} \end{cases}$

また, $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる.



$$(2) f(a) = f(a+1) \text{ のとき,}$$

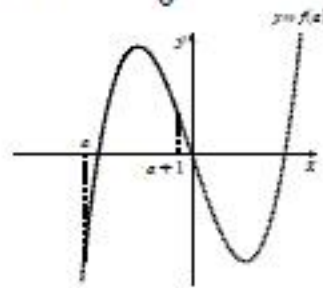
$$a^3 - 3a = (a+1)^3 - 3(a+1)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 3$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$$

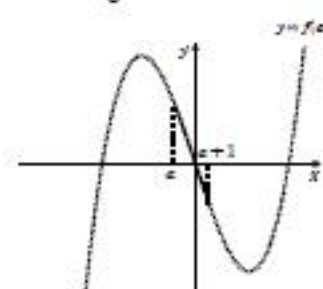
$$(3) (i) a \leq \frac{-3 - \sqrt{33}}{6} \text{ のとき}$$



$a \leq x \leq a+1$ では最小値はつねに $f(a)$

$$m(a) = f(a) = a^3 - 3a$$

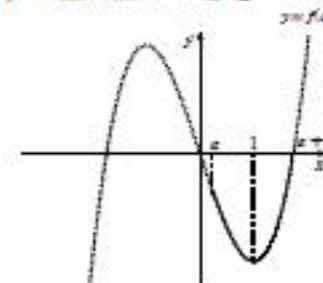
$$(ii) \frac{-3 - \sqrt{33}}{6} < a < 0 \text{ のとき}$$



$a \leq x \leq a+1$ では最小値はつねに $f(a+1)$

$$\begin{aligned} \therefore m(a) &= f(a+1) = (a+1)^3 - 3(a+1) \\ &= a^3 + 3a^2 - 2 \end{aligned}$$

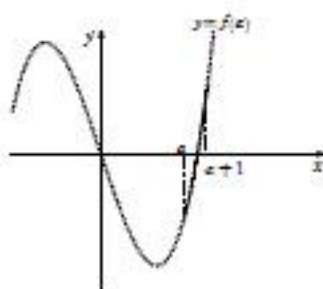
$$(iii) 0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}$$



$a \leq x \leq a+1$ では最小値はつねに $f(1)$

$$\therefore m(a) = f(1) = -2$$

$$(iv) 1 < a \text{ のとき}$$



$a \leq x \leq a+1$ では最小値はつねに $f(a)$

$$\therefore m(a) = f(a) = a^3 - 3a$$

以上より,

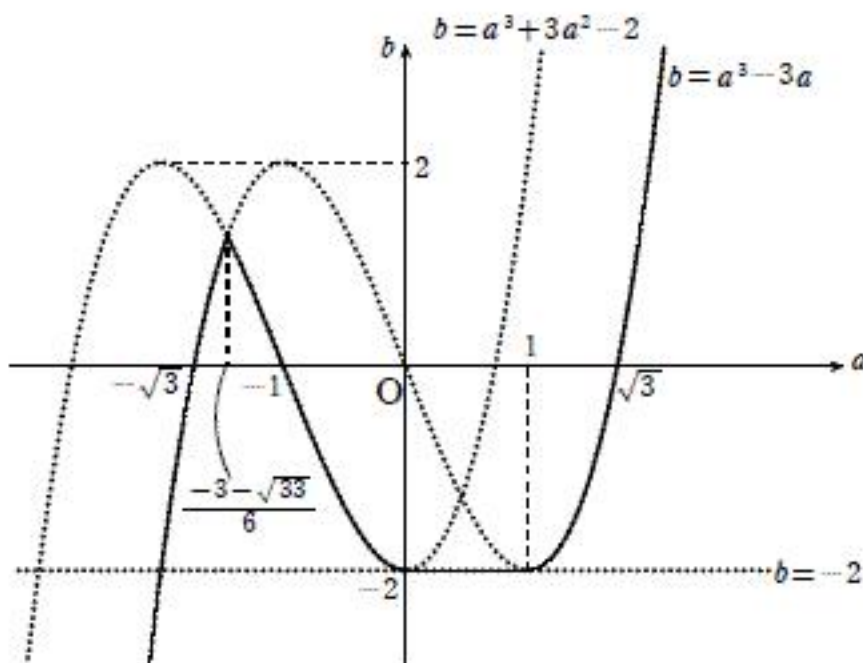
$$m(a) = \begin{cases} a^3 - 3a & \left(a \leq \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}, 1 < a \right) \\ a^3 + 3a^2 - 2 & \left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{6} < a < 0 \right) \\ -2 & (0 \leq a \leq 1) \end{cases}$$

$$(4) g(a) = a^3 + 3a^2 - 2 \text{ とすると,}$$

$$g'(a) = 3a^2 + 6a = 3a(a+2)$$

a		-2		0	
g'	+	0	-	0	+
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

以上を考慮して, $b = m(a)$ のグラフを描くと, 下図の通り.



$b = m(a)$ は左図太線部分

$$(1) f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad (\because x > 0)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ここで, } x > 0 \text{ より, } f''(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は存在しない.}$$

よって, $y = f(x)$ は単調増加で, そのグラフには変曲点がない. ■

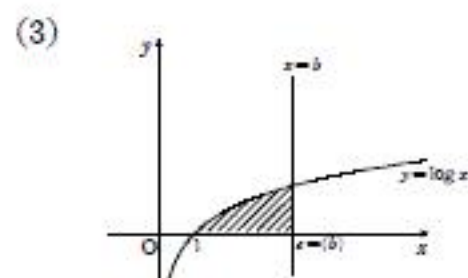
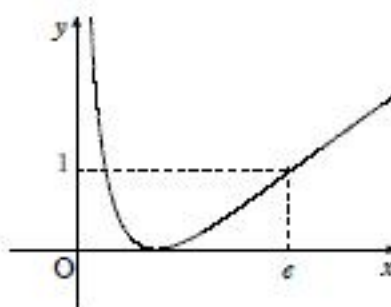
$$(2) \quad g'(x) = \frac{2 \log x}{x}$$

$$g''(x) = \frac{2(1 - \log x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

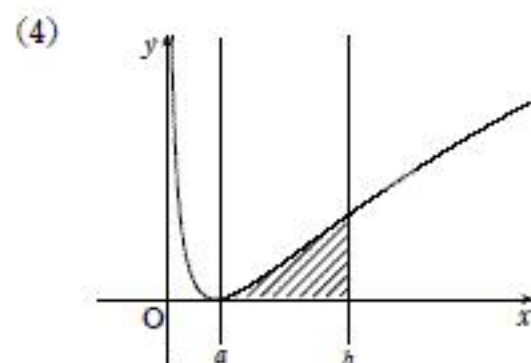
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

x	(0)	$\dots$	1	$\dots$	e	$\dots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$(+\infty)$



$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - [x]_1^e = 1$$

$\therefore$ 面積は 1



$$\therefore \int_1^e (\log x)^2 dx = [x (\log x)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2 \log x}{x} dx$$

$$= e - 2 \int_1^e \log x dx$$

$$= e - 2 \cdot 1 \quad (\because (3))$$

$$= e - 2$$

$\therefore$ 面積は $e - 2$