

2008 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:10~16:50 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入してください。なお、解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。
3. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル（いずれもHB・黒）を使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

また、折りまげたり、汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4. 記述解答用紙には、受験番号と氏名を2か所記入してください。
5. マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は、電算処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
6. 設問文にある点数は、満点が100点となるような配点表示になっていますが、数学科の配点は200点となりますので、注意してください。

- I 次の問題文の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマークせよ。
ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$f(x) = e^{-x} \cos \pi x$ とし、 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。

点 $P_0(0, f(0))$ における C の接線と x 軸との交点を $Q_1(x_1, 0)$ とする。点 $P_1(x_1, f(x_1))$ における C の接線と x 軸との交点を $Q_2(x_2, 0)$ とする。同様に、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し点 $P_n(x_n, f(x_n))$ における C の接線と x 軸との交点を $Q_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ とする。また、 Q_0 を点 $(0, 0)$ とする。

このとき、 $x_1 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $x_2 = \boxed{\text{イ}}$ である。また、三角形 $P_n Q_n Q_{n+1}$ の面積を S_n とすると $S_0 = \boxed{\text{ウ}}$ であり、 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \boxed{\text{エ}}$ である。

$x > 0$ において $f(x) = 0$ となる x の値を小さい順に $a_1, a_2, a_3, \dots$ とする。曲線 C は点 $(a_1, 0) \boxed{\text{オ}}$ 。また、点 $(a_2, 0) \boxed{\text{カ}}$ 。

問題 I のア、イ、ウ、エの解答群

- | | | | | |
|----------------------|-------------------|--------------------|--------------------|----------------------|
| Ⓐ 0 | Ⓑ $\frac{1}{2}$ | Ⓒ 1 | Ⓓ $\frac{3}{2}$ | Ⓔ 2 |
| Ⓕ $\frac{5}{2}$ | Ⓖ $\frac{\pi}{2}$ | Ⓗ π | Ⓘ $\frac{3}{2}\pi$ | Ⓙ 2π |
| Ⓚ $\frac{5}{2}\pi$ | ① $\frac{e}{2}$ | Ⓜ e | Ⓝ $\frac{3}{2}e$ | ⑤ $\frac{1}{2(e-1)}$ |
| Ⓟ $\frac{e}{2(e-1)}$ | ④ $\frac{1}{e-1}$ | Ⓡ $\frac{2e}{e-1}$ | | |

問題 I のオ、カの解答群

- Ⓐ の付近で上に凸である
 Ⓑ の付近で下に凸である
 Ⓒ を変曲点としてもつ

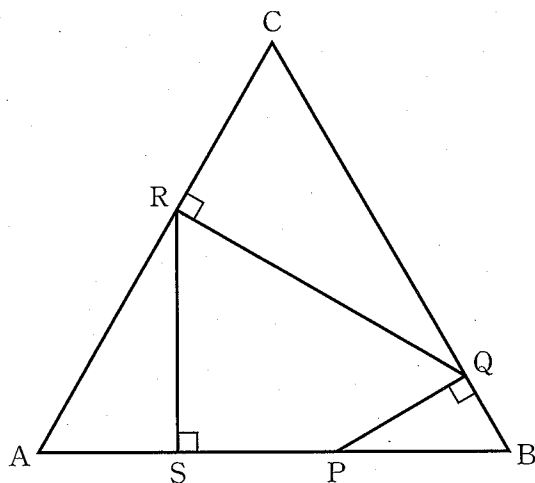
II 次の問題文の空欄にもっとも適する答を解答群から選び、その記号をマークせよ。

ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

1 辺の長さが1の正三角形 ABC がある。辺 AB 上の点 P から辺 BC に下ろした垂線の足を Q、点 Q から辺 CA に下ろした垂線の足を R、点 R から辺 AB に下ろした垂線の足を S とする。

線分 AP の長さを $\overline{AP} = t$ ($0 < t < 1$) とするとき、 $\overline{AS} < \overline{AP}$ となるような t の値の範囲は $< t < 1$ である。 $< t < 1$ のとき、3つの線分 PQ, QR, RS の長さの和を L とすると、 $\frac{L}{\sqrt{3}}$ のとり得る値の範囲は $< \frac{L}{\sqrt{3}} < \text{ケ}$ となる。

$0 < t < 1$ において、線分 PR の長さが最小となるのは $t = \text{コ}$ のときである。



問題IIのキ, ク, ケ, コの解答群

- | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (a) 1 | (b) $\frac{1}{2}$ | (c) $\frac{1}{3}$ | (d) $\frac{2}{3}$ | (e) $\frac{1}{4}$ | (f) $\frac{3}{4}$ |
| (g) $\frac{1}{5}$ | (h) $\frac{2}{5}$ | (i) $\frac{3}{5}$ | (j) $\frac{4}{5}$ | (k) $\frac{1}{6}$ | (l) $\frac{5}{6}$ |
| (m) $\frac{1}{7}$ | (n) $\frac{2}{7}$ | (o) $\frac{3}{7}$ | (p) $\frac{4}{7}$ | (q) $\frac{5}{7}$ | |

Ⅲ 実数 a に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の $a \leq x \leq a+1$ における最小値を $m(a)$ とおく。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) の極値を求め、そのグラフをかけ。
- (2) $f(a) = f(a+1)$ を満たす a の値を求めよ。
- (3) a の値で場合を分けて、 $m(a)$ を a の式として表せ。
- (4) 横に a 軸、縦に b 軸をとり、平面上に曲線 $b = m(a)$ の概形をかけ。

IV $x > 0$ で定義された 2 つの関数 $f(x) = \log x$ と $g(x) = (\log x)^2$ について、以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) $y = f(x)$ は単調増加であり、そのグラフには変曲点がないことを示せ。
- (2) $y = g(x)$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフをかけ。

$g(x)$ が最小値をとるときの x の値を a とし、 $y = g(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を b とする。

- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = b$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (4) 曲線 $y = g(x)$ と x 軸、および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を求めよ。